

Математика

Библиотечка
физико-математической школы

Е.Б.Дынкин
С.А.Молчанов
А.Л.Розенталь
А.Н.Толпыго

Математи- ческие задачи



Математика

Библиотечка
физико-математической школы

Выпуск 1*

Е. Б. Дынкин
С. А. Молчанов
А. Л. Розенталь
А. К. Толпыго

Математические задачи

*Издание третье,
переработанное*

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы
Москва 1971

512

Д 89

УДК 512.2/512.3

Математика

Библиотечка
физико-математической школы

Серия дополнительная

Редактор серии
И. М. Гельфанд

Содержание

| | |
|--------------------------------------|----|
| Предисловие к третьему изданию . . . | 4 |
| Советы читателям | 6 |
| Задачи | 7 |
| Решения и указания | 28 |
| Дополнительные задачи | 69 |

В этой книге собраны задачи, предлагавшиеся в Вечерней математической школе (ВМШ) при Московском государственном университете. Школа была организована осенью 1963 года. Первый год в ней занимались только ученики седьмых и восьмых классов. В 1964/65 учебном году появились также группы для старшекласников, а в 1966/67 — группы для шестикласников. Один раз в неделю школьники из всех районов Москвы слушают лекции и решают задачи под руководством преподавателей, аспирантов и студентов механико-математического факультета МГУ. В руководстве группами для шестых, седьмых и восьмых классов участвуют также старшекласники специализированной математической школы № 2.

Каждую неделю школьникам предлагается для решения серия задач. В течение двух недель ученики решают эти задачи и подают руководителям письменные решения. Затем решения разбираются на групповых занятиях. Через определенные промежутки времени специальные жюри присуждают победителям конкурса премии.

Большинство задач первого раздела книги — это задачи, дававшиеся семи- и восьмикласникам в 1963/64 учебном году *). При их составлении использовались разнообразные источники: материалы математических олимпиад в Москве (задачи 8, 10, 33, 42, 49, 50, 59, 79, 80, 82, 84, 92, 104, 107, 112), в Киеве (задачи 12, 22, 71, 77, 87, 98, 113, 119) и др.; некоторые зарубежные издания (так, задачи 142—143 взяты из монографии G. R i n g e l, Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, Berlin, 1959, задачи 76 и 89 —

*) Большая часть задач была предложена К. Андреевым, Е. Дынкиным, А. Кобринским, В. Мазо, А. Розенталем, А. Рудаковым, А. Толпыго.

из журнала *American Mathematical Monthly*, задачи 51 и 52 — из журнала *Matematyka czasopismo dla nauczyciel*, Warszawa); устные материалы школьных математических кружков при МГУ (работающих уже около 30 лет). Ряд задач, по-видимому, еще нигде не публиковался (например, 14, 27, 133, 136, 146, 147, 151, 160).

Задачи, как правило, приведены в том порядке, в каком они давались в математической школе. Премии присуждались пять раз: за задачи 1—50, 51—75, 76—100, 101—115 и 124—143. Последние 20 из них более трудные. Это задачи, которые были даны весной 1964 года для решения во время летних каникул.

В следующем разделе книги ко всем задачам даны краткие решения или указания. При их составлении использованы письменные работы учеников ВМШ.

Задачи без решений помещены в специальном разделе «Дополнительные задачи».

Первое издание этой книги вышло осенью 1965 года. Во втором издании (1966 год) был переработан лишь раздел «Дополнительные задачи».

В настоящем, третьем издании книга подверглась существенной переработке. Из первого раздела исключены 30 задач, которые казались авторам стандартными или малоинтересными. Добавлено около 50 новых задач. Переработаны некоторые решения.

Полностью обновлен раздел «Дополнительные задачи». В частности, из него были исключены все задачи, вошедшие (с решениями) в книгу Е. Б. Дынкина, С. А. Молчанова и А. Л. Розенталя «Математические соревнования», изд. «Наука», 1970. Добавлено свыше ста новых задач главным образом из числа задач, которые давались ученикам ВМШ в последние годы. Подбором этих задач руководили: в 1964/65 учебном году — Н. Васильев, в 1965/66 учебном году — Л. Гончарова, А. Толпыго, В. Фишман и И. Яглом, в 1966/67 учебном году — Б. Григорьев, С. Гусейн-заде и И. Евстигнеев, с 1967/68 по 1969/70 учебный год — А. Бариль, С. Кузнецов, С. Молчанов, А. Орлов и А. Розенталь.

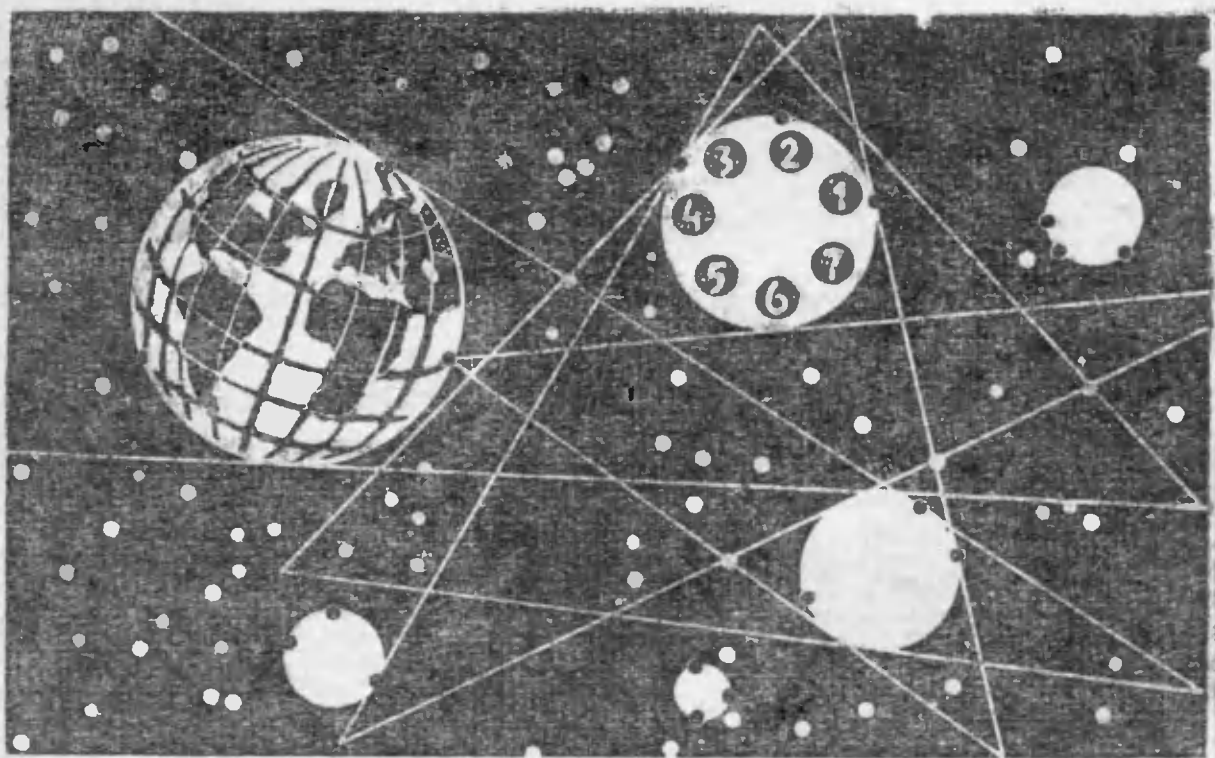
Авторы

Для того чтобы решать предложенные задачи, достаточно знаний в объеме 8 классов *). Большинство задач доступно и семиклассникам. Задачи разнообразны по своему характеру и по степени трудности. Легкие задачи чередуются с трудными. Поэтому нет никакой необходимости решать задачи подряд. Можно начинать с любого места и решать в любом порядке.

Если вам не удастся решить задачу сразу, не спешите смотреть решение. Поставьте себя на место учеников Вечерней математической школы, которые решали серию из пяти задач в течение двух недель. Если же задача никак не поддается вашим усилиям, прочтите указания. Они довольно кратки, однако после того, как вы самостоятельно повозились с задачей, их будет достаточно, чтобы направить вас на правильный путь.

Читать указания следует и в том случае, когда вы решили задачу сами. Сравнивая ваше решение с авторским, вы иногда заметите пробелы в своем решении, иногда узнаете о связях решенной вами задачи с другими интересными вопросами, найдете ссылки на доступную литературу и т. п.

*) Исключение составляют задачи, отмеченные звездочкой. Они требуют несколько большей подготовки.



ЗАДАЧИ

1. На рис. 1 изображен многоугольник $ABCDE$. Из точки O видны полностью стороны AB , DE и EA и лишь частично сторона CD . Нарисовать какой-нибудь многоугольник и точку O внутри него так, чтобы ни одна сторона не была видна из нее полностью.

Нарисовать многоугольник и точку O вне его так, чтобы ни одна сторона не была видна из нее полностью.

2а. Вы хотите узнать номер моего телефона, задавая мне вопросы, на которые я буду отвечать только «да» или «нет». Придумайте способ, гарантирующий успех за наименьшее число вопросов (считать, что телефонный номер состоит из произвольных пяти цифр).

б. Предположите теперь, что на один из ваших вопросов я могу дать неправильный ответ. Какие тогда вопросы вы будете задавать и какое наименьшее число вопросов вам понадобится, чтобы отгадать номер?

3. Расстояние между деревнями A и B по шоссе равно 3 км. В деревне A 100 школьников, в деревне B 50 школьников. На каком расстоянии от деревни A надо построить школу, чтобы общее расстояние, которое придется пройти всем 150 школьникам, было наименьшим?

4. Пользуясь одним только циркулем, построить вершины квадрата, вписанного в данную окружность. (Центр окружности известен.)

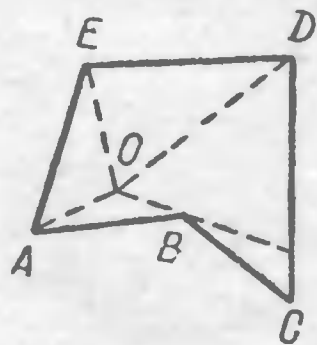


Рис. 1.

5. В гостиницу приехал путешественник. Денег он не имел, а обладал лишь серебряной цепочкой, состоящей из шести звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он расплачивался одним звеном цепочки, при этом хозяин предупредил, что согласен взять не более одного распиленного звена.

Как путешественнику распилить цепочку, чтобы прожить в гостинице шесть дней и ежедневно расплачиваться с хозяином?

6. Каждая из двух противоположных сторон произвольного выпуклого четырехугольника разделена на пять равных частей. Прямые, соединяющие соответствующие точки деления, разделяют данный

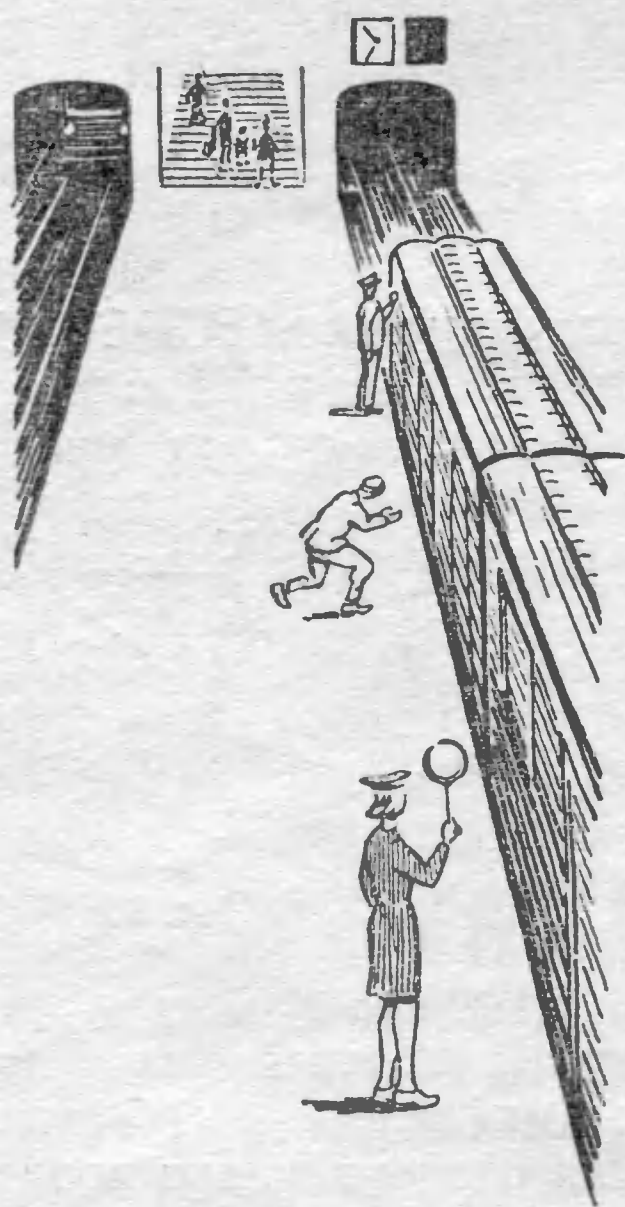


Рис. 2.

четыреугольника на пять последовательно расположенных четырехугольников. Доказать, что площадь среднего из них в пять раз меньше площади данного четырехугольника.

7. Школьник участвует в двух математических кружках, которые работают в противоположных концах Москвы. Ехать надо по одной и той же линии метро, но в противоположные стороны. Этот школьник садится каждый раз на первый приходящий поезд независимо от того, с какой стороны тот пришел. К концу года школьник обнаружил, что в первом кружке он бывал вдвое чаще, чем во втором. Как это могло произойти? (Конечно,

школьник попадает в метро не всегда в одно и то же время: иногда немного позже, иногда немного раньше в пределах некоторого промежутка, в течение которого приходит несколько поездов с каждой стороны (рис. 2). Поезда проходят в каждом направлении через одинаковые интервалы времени.)

8. Через вершину A выпуклого четырехугольника $ABCD$ провести прямую, разбивающую его на две фигуры одинаковой площади.

9. (Продолжение задачи 5.) Какое наименьшее число звеньев пришлось бы распилить, если бы путешественник жил в гостинице 100 дней и имел цепочку из 100 звеньев? Каков ответ в общем случае (n дней и n звеньев)? Предполагается, что хозяин согласен принять любое число распиленных звеньев.

10. Минутная и часовая стрелки часов совпадают ровно в 12 часов. В какой момент они совпадут впервые после 12 часов?

11. В одном стакане 5 ложек чая, в другом 5 ложек молока. Ложку молока перелили из второго стакана в первый, затем тщательно перемешали и ложку чая с молоком перелили обратно во второй стакан. Чего оказалось больше: чая в молоке или молока в чае?

Как изменится ответ, если такое переливание производили 10 раз?

Если перемешивали не очень тщательно?

Если чая в первом стакане немного больше, чем молока во втором?

12. Имеется лампа с семью штырьками, расположенными по кругу на одинаковых расстояниях друг от друга, розетка с семью гнездами, также расположенными по кругу на одинаковых расстояниях друг от друга. Занумеровать штырьки и гнезда цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы, как ни воткнуть лампу в розетку, хотя бы один штырек попадал в гнездо с тем же номером.

13. В десятичной дроби

0,12345678910111213141516171819202122...

выписаны подряд все натуральные числа. Доказать, что эта дробь непериодическая.

14. Самолет летит из Ашхабада по кратчайшему пути в Сан-Франциско. В каком направлении он вылетает из Ашхабадского аэропорта (в южном, или в юго-западном, или в западном и т. д.)?

Для интересующихся сообщаем географические координаты городов:

Ашхабад $\approx 58^\circ$ вост. долготы, 38° сев. широты,
Сан-Франциско $\approx 122^\circ$ зап. долготы, 38° сев. широты.

15. Докажите, что произведение цифр неоднозначного числа меньше этого числа.

16. Доказать, что для произвольного треугольника отрезок, соединяющий центры вписанной и невписанной

окружностей, делится пополам описанной окружностью (рис. 3).

17. Имеются три кучи камней. Число камней во всех кучах одинаково. Двое играющих берут по очереди любое число камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает тот, кто берет последние камни. Как должен играть начинающий, чтобы в любом случае выиграть?

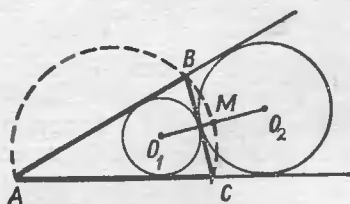


Рис. 3.

18. а. На листе клетчатой бумаги нарисован многоугольник (не обязательно выпуклый), стороны которого идут по границам клеток. Докажите, что центр тяжести этого многоугольника можно найти при помощи линейки.

б. Та же задача для треугольника, вершины которого находятся в узлах клеток.

в. Та же задача для произвольного многоугольника (не обязательно выпуклого) с вершинами в узлах клеток.

19. На 44 деревьях, посаженных по окружности, сидели 44 веселых чижа (на каждом дереве по одному). Время от времени какие-то два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Смогут ли чижи когда-нибудь собраться на одном дереве?

20. Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление.

В процессе расследования каждый из них сделал по два заявления.

Браун — Я не делал этого.

Джонс не делал этого.

Джонс — Браун не делал этого.

Смит сделал это.

Смит — Я не делал этого.

Браун сделал это.

Было установлено, далее, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий — раз солгал, раз сказал правду. Кто совершил преступление?

21. В работе школьного драмкружка принимает участие 31 человек. Возрасты участников различны, а всем вместе

434 года. Докажите, что можно указать 20 кружковцев, которым вместе не меньше 280 лет.

22.а. Запишем в строку одно за другим натуральные числа от 1 до 60:

1234567891011121314151617...5960.

Из полученного числа вычеркнуть сто цифр так, чтобы оставшееся число было наименьшим.

б. Из того же числа вычеркнуть сто цифр так, чтобы оставшееся число было наибольшим.

23. На плоскости даны 4000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что можно найти 1000 непересекающихся четырехугольников с вершинами в этих точках.

24. С помощью циркуля и линейки разделить данный угол в 19° на 19 равных частей.

25. Докажите, что сумма всех дробей с числителем 1 и знаменателями 2, 3, 4, ..., n не может быть целым числом ни при каком n .

26. На всемирном фестивале молодежи встретились 6 делегатов. Выяснилось, что среди любых трех из них двое могут объясниться между собой на каком-нибудь языке. Докажите, что тогда найдется тройка делегатов, каждый из которых может объясниться с каждым.

27. На шахматной доске поставлены 5 ладей на полях b2, b7, g2, g7 и d4. Разрешается двигать ладьи одновременно на одну клетку в одном и том же направлении. Когда какая-нибудь ладья выходит за пределы доски, ее убирают и продолжают играть оставшимися до тех пор, пока не будут убраны все 5 ладей. Как надо ходить, чтобы общее число ходов, сделанных всеми пятью ладьями, было наименьшим?

28. Доказать, что если у вписанного четырехугольника одна из диагоналей является диаметром описанной окружности, то проекции противоположных сторон четырехугольника на другую диагональ равны.

29. Можно ли разменять 25 рублей, имея рублевые, трехрублевые и пятирублевые купюры, так, чтобы всего получилось ровно 10 купюр?

30. Если на плоскости задано пять точек, то, рассматривая всевозможные тройки этих точек, можно образовать 30 углов. Обозначим через α наименьший из этих углов. Как надо расположить точки, чтобы значение α было наибольшим?

31. Найти все тройки целых чисел x, y, z , удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz.$$

32. Построить четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам и углу между сторонами AB и CD .

33. В одном городе есть несколько (более одного) автобусных маршрутов. При этом:

А) На каждом маршруте ровно три остановки.

Б) С каждого маршрута на каждый можно пересест, и притом на одной остановке.

В) С каждой остановки на каждую можно проехать без пересадки, и притом только одним маршрутом.

Сколько автобусных маршрутов в этом городе?

34. На круглом двенадцатиместном столе разложены карточки с именами приглашенных. Гости пришли и сели, не обратив внимания на карточки. Докажите, что можно повернуть стол так, чтобы не менее двух гостей оказались на своих местах.

35. Дан равнобедренный треугольник ABC . Углы BAC и BCA равны 80° . Из вершин A и C проведены две прямые до пересечения с противоположными сторонами соответственно в точках D и E . Угол CAD равен 60° , угол ACE равен 50° . Определить величину угла ADE .

36. Палатка натягивается на четыре кола, которые соединяются в верхней точке. Доказать, что всегда можно вбить в каждый кол по гвоздю так, чтобы эти гвозди располагались в вершинах параллелограмма.

37. Расположить шесть круглых неотточенных карандашей так, чтобы каждые два из них прикасались друг к другу.

38. Доказать, что нельзя провести прямую так, чтобы она пересекала все стороны 1001-угольника.

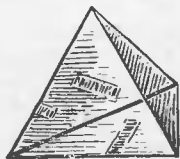


Рис. 4.

39. На окружности вписаны в произвольном порядке 4 единицы и 5 нулей. Затем в промежутке между двумя одинаковыми цифрами пишется 1, между разными цифрами 0, а первоначальные цифры стираются. Доказать, что сколько бы раз мы ни повторяли этот процесс, мы

никогда не получим набора из 9 единиц.

40. Молоко в Москве продается в пакетиках, имеющих форму треугольной пирамиды (рис. 4). Директор молочного завода — любитель математики — обещает премию тому,

кто придумает форму пакетика, при которой к каждой общей стороне двух треугольников прилегает хотя бы один тупой угол треугольника.

41. Докажите, что из любых ста целых чисел можно выбрать одно или несколько так, чтобы сумма их оканчивалась двумя нулями.

42. В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов (каждый сыграл по разу с каждым). Все они набрали различное число очков.

Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько набрали вместе шахматисты, занявшие места с 5-го по 8-е. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 3-е и 5-е места?

43.а. Найти число, которое делится на 2 и 9 и имеет всего 14 делителей (включая 1 и само это число).

б. Доказать, что если заменить 14 делителей на 15, то задача имеет несколько решений, а при замене 14 на 17 решений вообще не будет.

44. В выпуклом четырехугольнике найти точку, для которой сумма расстояний до вершин минимальна.

45. Улитка ползет из точки A , поворачивая на 90° в какую-нибудь сторону через каждые 15 минут. Докажите, что она может вернуться в точку A только через целое число часов. (Скорость улитки считается постоянной.)

46. Докажите, что не существует целых чисел x и y , удовлетворяющих уравнению $15x^2 - 7y^2 = 9$.

47. В комнате площадью 6 м^2 постелены на полу три ковра произвольной формы площадью 3 м^2 каждый. Докажите, что какие-нибудь два из этих ковров налегают друг на друга по площади, не меньшей одного квадратного метра.

Как изменится ответ, если в той же комнате положить 4 ковра площадью 2 м^2 каждый?

48. Плоскость разбита на квадратные клетки подобно листу клетчатой бумаги. В каждой клетке записано целое положительное число. Известно, что каждое число равно среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в четырех соседних клетках: сверху, снизу, справа и слева (средним арифметическим четырех чисел a, b, c, d называется число $\frac{a+b+c+d}{4}$). Докажите, что все числа равны между собой.

49. В десятичной записи некоторого целого числа имеется 300 единиц, а остальные цифры нули. Может ли это число быть полным квадратом?

50. Нетрудно покрыть 64 поля шахматной доски 32 костяшками домино так, чтобы каждая костяшка покрывала два поля (если, конечно, размеры полей и размеры костяшек соответствуют друг другу). Можно ли покрыть 62 поля шахматной доски 31 костяшкой так, чтобы свободными остались два противоположных угловых поля доски?

51. Найти наибольший общий делитель следующих чисел: 11 111 111 и 1 111... 111 (сто раз повторяется единица).

52. Внутри выпуклого 100-угольника выбрано 30 точек так, что из 130 точек (100 вершин и 30 выбранных точек) никакие три не лежат на одной прямой. 100-угольник разрезан на треугольники так, что совокупность вершин всех этих треугольников состоит из 30 выбранных точек и 100 вершин первоначального многоугольника. Сколько имеется треугольников?

53. На плоскости даны три прямые, пересекающиеся в одной точке. На одной из них отмечена точка. Известно, что прямые являются биссектрисами некоторого треугольника, а отмеченная точка — одна из его вершин. Построить этот треугольник.

54. (Статистический эксперимент.) Выберите в любой книге отрывок, содержащий 1000 знаков (кроме букв, знаком считается интервал между словами; знаки препинания не учитываются). Подсчитайте, сколько раз каждый знак встречается в этом отрывке. Расположите затем все буквы и пробелы в порядке убывания их частот.

55. Расшифруйте следующий текст:

Тядзгышхохэ пэжо ч йчтэншаь гэнэшюэь
епяу дызысю, бэхыэь пыь бэ лягяня
чтгыщюпмчо ю ч ячпыхмшаю дызысыью,
Ыщпяга.

Известно, что он зашифрован следующим образом. Гласные буквы:

а, о, у, ы, я, е, ю, и, э, й

как-то разбиты на пары *). Согласные буквы:

б, в, г, д, ж, з, к, л, м, н, п, р, с, т, ф, х, ц, ч, ш, щ, ь, ь

также как-то разбиты на пары. Каждая буква в тексте заменена на другую букву из той же пары **).

56. В ящике лежит 100 разноцветных шариков: 28 красных, 20 зеленых, 12 желтых, 20 синих, 10 белых и 10

*) Полугласную й мы условно причисляем к гласным, а буквы ь, ь причисляем к согласным.

**) Текст записан по всем правилам русской пунктуации.

черных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них обязательно оказалось 15 шариков одного цвета?

57. Построить квадрат, зная по одной точке на каждой его стороне.

58. Может ли сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел быть равна сумме четвертых степеней двух других последовательных натуральных чисел? Иначе говоря, существуют ли целые положительные числа m и n , для которых $m^2 + (m + 1)^2 = n^4 + (n + 1)^4$?

59. В шахматном турнире участвовали два ученика 7-го класса и некоторое число учеников 8-го класса. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а каждый восьмиклассник набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? (Каждый участник играет с каждым другим один раз.) Найдите все решения.

60. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.

61. На круглом столе радиуса R расположено без наложений n круглых монет радиуса r , так что больше нельзя положить ни одной монеты. Доказать, что

$$\frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} - 1 \right) < \sqrt{n} < \frac{R}{r}.$$

62. Из чисел 1, 2, 3, ..., 200 произвольно выбрали 101 число. Доказать, что среди выбранных чисел всегда найдутся два таких числа, из которых одно делится на другое.

63. Доказать, что для любого натурального числа N можно найти делящееся на N число, все n цифр которого — нули и единицы. (Какое наименьшее число цифр может при этом понадобиться?)

64. В треугольнике ABC проведены высоты AK и BH ; O — центр описанного круга. Доказать, что OC перпендикулярно к KH .

65. Предположим, что длина спички равна 1. Составить из двенадцати спичек многоугольник, ограничивающий площадь, равную четырем квадратным единицам.

66. Среди чисел, все цифры которых единицы, найти наименьшее, делящееся на число 33...33, составленное из 100 троек.

67. Имеется квадратная таблица из 16 клеток, в каждой из которых написан плюс или минус. Разрешается одновременно изменить знаки на противоположные во всех четырех клетках некоторой строки или некоторого столбца. Это можно повторять несколько раз, пока число минусов не станет наименьшим. Наименьшее число минусов, к которому можно прийти, отправляясь от данной таблицы, называется ее характеристикой. Какие значения может иметь характеристика? (Найти все возможные значения.)

68. В выпуклом 20-угольнике проведены все диагонали. На сколько частей они делят 20-угольник, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

69. Сторона квадрата равна единице. Через его центр проведена произвольная прямая. Вычислите сумму квадратов расстояний от четырех вершин квадрата до этой прямой.

70. Выражение

$$x^8 + x^4 + 1$$

разложить на четыре множителя.

71. В математическом кружке участвуют 100 школьников. Известно, что среди любых четырех участников кружка найдется по меньшей мере один, знакомый с остальными тремя. Докажите, что найдется участник кружка, знакомый со всеми 99 остальными участниками. Каково минимальное число школьников, знакомых со всеми остальными 99 участниками?

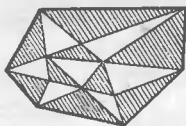


Рис. 5.

72. На рис. 5 изображен шестиугольник, разбитый на черные и белые треугольники так, что:

а) два треугольника либо имеют общую сторону (тогда они раскрашены в разные цвета), либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек;

б) каждая сторона шестиугольника является в то же время стороной одного из черных треугольников.

Докажите, что десятиугольник разбить таким образом невозможно.

73. В окружность радиуса 1 вписан правильный десятиугольник. Найти сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин этого десятиугольника.

74. Если некоторое четырехзначное число умножить на число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то получится восьмизначное число, у которого последние три цифры нули. Найти все такие числа.

75. Построить треугольник, зная его основание, угол при вершине и медиану к боковой стороне.

76. Известно, что шесть кругов имеют общую точку. Докажите, что хотя бы один из них содержит центр некоторого другого круга.

77. Рассматриваются всевозможные семизначные числа с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, записанными в произвольном порядке. Доказать, что ни одно из этих чисел не делится ни на какое другое из них.

78. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком прямой с центром O описанного круга. Из вершины A проведена высота $АН$. Доказать, что $\angle BAN = \angle OAC$.

79. Докажите, что при любом значении x

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0.$$

80. Докажите, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}.$$

81. Можно раскрасить грани куба либо все в белый цвет, либо все в черный, либо часть в белый, а часть в черный. Сколько существует различных способов окраски? (Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы они ни переворачивались.)

82. На доску размером 4×100 квадратиков положено столько прямоугольных костяшек, что каждая из них целиком покрывает ровно две клетки, никакие две не перекрываются и ни один квадратик не остается свободным. Докажите, что при этом можно распилить доску по одной из нанесенных на нее продольных или поперечных прямых, не сдвигая с места и не распиливая ни одной костяшки.

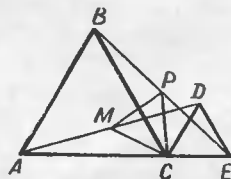


Рис. 6.

83. На продолжении CE стороны AC равностороннего треугольника ABC построен произвольный равно-сторонний треугольник CDE (так, как показано на рис. 6). Доказать, что треугольник $CMР$, где M и P — середины отрезков AD и BE соответственно, — равносторонний.

84. Двадцати школьникам были заданы 20 задач. Оказалось, что каждый школьник решил две задачи и каждая

задача была решена двумя школьниками. Докажите, что разбор задач можно организовать так, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач и все задачи были разобраны.

85. Известно, что в некоторый десятиугольник можно вписать оскружность.

Построить этот десятиугольник, зная все его углы и одну сторону.

86. Докажите, что последние цифры чисел

$$\frac{1 \cdot 2}{2}, \quad \frac{2 \cdot 3}{2}, \quad \frac{3 \cdot 4}{2}, \dots, \frac{n(n+1)}{2}$$

повторяются периодически.

87. На 64 клетках шахматной доски выписаны подряд числа от 1 до 64 (в верхнем ряду слева направо числа от 1 до 8, в следующем ряду числа от 9 до 16 и т. д.). Восемь ладей поставлены так, что никакие две не бьют друг друга. Подсчитана сумма чисел, написанных на тех восьми полях, на которых поставлены ладьи. Найти все значения, которые может иметь эта сумма.

88. Сколько раз входит двойка в разложение на простые множители произведения

$$(n+1)(n+2)(n+3) \dots (2n-1)2n?$$

89. В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC опущен перпендикуляр HE на боковую сторону AC . Точка O делит пополам отрезок HE . Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

90. Внутри круга выбрана точка A , отличная от его центра. Всегда ли можно направить из точки A луч света так, чтобы он вернулся в точку A , отразившись от окружности в нескольких (больше чем двух) различных точках? (При отражении луча от окружности угол падения равен углу отражения *).)

91. Известно, что замкнутая ломаная линия состоит из 203 звеньев, причем никакие два звена не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число точек самопересечения возможно для такой линии?

92. Из пяти окружностей каждые четыре имеют общую точку. Доказать, что все пять окружностей имеют общую точку.

*) Это означает, что падающий и отраженный лучи образуют равные углы с радиусом, проведенным в точку падения.

93. Два пешехода выходят из пунктов A и B и движутся по лучам, исходящим из A и B и пересекающимся в точке O , с одной и той же скоростью. Построить отрезок, равный кратчайшему расстоянию между движущимися пешеходами.

Через сколько времени после начала движения пешеходы будут на кратчайшем расстоянии друг от друга, если $\angle AOB = 90^\circ$, $AO = a$, $BO = b$, а скорость пешеходов равна v ?

94. Доказать, что если в выпуклом шестиугольнике каждая из трех диагоналей, соединяющих противоположные вершины, делит площадь пополам, то эти диагонали пересекаются в одной точке.

95. В 18 точках, обозначенных на рис. 7, расставлены числа от 1 до 18. Докажите, что найдется отрезок, на концах которого стоят числа с разностью, большей трех.

96. Доказать, что числа $2^m - 1$ и $2^n - 1$ (m и n — натуральные) взаимно просты тогда и только тогда, когда m и n взаимно просты.

97. Даны три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой. Построить прямую, пересекающую AC в точке X и BC в точке Y так, чтобы $AX = XY = YB$.

98. Доказать, что для любых положительных a, b, c не могут одновременно выполняться неравенства:

$$\begin{aligned} a(1-b) &> 1/4, & b(1-c) &> 1/4, \\ c(1-a) &> 1/4. \end{aligned}$$

99. Доказать, что если числа a и b отличны от нуля, то

$$(a+b)^{100} < 2^{100} (a^{100} + b^{100}).$$

100. Стержень AB длины a шарнирно соединен в точке B со стержнем BC длины b . На отрезке AC , как на основании, строится равносторонний треугольник ACE . При каком взаимном расположении стержней расстояние BE будет наибольшим?

101. Доказать, что среди вписанных в полукруг прямоугольников наибольший периметр имеет тот, у которого одна из сторон вчетверо больше другой стороны.

102. Доказать, что любой неравносторонний треугольник можно целиком накрыть двумя меньшими подобными ему треугольниками.

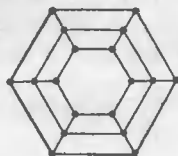


Рис. 7.

103. Точка внутри равнобедренной трапеции соединена со всеми вершинами. Доказать, что из четырех получившихся отрезков можно сложить четырехугольник, вписанный в эту трапецию (так, что на каждой стороне трапеции лежит по одной вершине четырехугольника).

104. Из картона вырезано два круга: большой и маленький. Каждый из этих кругов разбит радиусами на 200 одинаковых секторов, причем какие-то сто секторов на каждом круге закрашены в черный цвет, а остальные сто оставлены белыми. Круги наложены так, что их центры совпадают. Докажите, что внутренний круг можно так повернуть, чтобы по меньшей мере 100 его секторов оказались лежащими на имеющих тот же цвет секторах внешнего круга.

105. Даны три точки A , B и K . Как нужно провести прямую через точку K , чтобы сумма расстояний до нее от точек A и B была:

- а) наименьшей,
- б) наибольшей?

106. Тройка чисел 1, 2, 3 обладает тем свойством, что произведение любых двух из этих чисел, увеличенное на единицу, делится на третье число. Найдите все тройки натуральных чисел, обладающие этим свойством.

107. Квадратная таблица состоит из 25×25 клеток. В каждой из 625 клеток этой таблицы записано одно из первых 25 натуральных чисел: 1, 2, ..., 25. При этом: а) в клетках, симметричных относительно главной диагонали, записаны равные числа; б) два одинаковых числа не могут стоять в одной строке или в одном столбце. Докажите, что все числа, стоящие на главной диагонали, попарно различны.

108. На плоскости даны три точки A , B , C и три угла $\angle H$, $\angle K$ и $\angle M$. Каждый из углов меньше 180° , а их сумма равна 360° . Построить с помощью линейки и транспортира точку O такую, что $\angle AOB = \angle H$, $\angle BOC = \angle K$, $\angle COA = \angle M$. (С помощью транспортира можно перенести любой данный угол так, чтобы одна из его сторон заняла произвольное наперед заданное положение.)

109. Пусть $ABCD$ и $BKMN$ — два квадрата. Докажите, что, продолжая медиану BE треугольника ABN за вершину B , получим высоту в треугольнике KBC (рис. 8).

110. Доказать, что фигуру из 60 клеток, изображенную на рис. 9, нельзя разбить на прямоугольники из трех клеток.

111. На плоскости задано $n > 3$ точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Всегда ли можно построить окружность, проходящую не меньше чем через три из заданных n точек и не содержащую внутри ни одной из этих n точек?

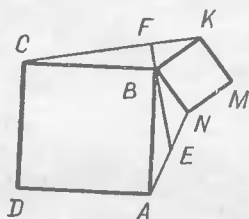


Рис. 8.

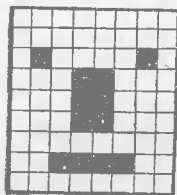


Рис. 9.

112. Докажите, что шахматную доску размера $4 \times n$ нельзя обойти конем так, чтобы побывать при этом по одному разу на каждом поле и последним ходом вернуться на исходное поле.

113. На плоскости расположены n точек так, что любые 4 из них являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что все точки являются вершинами выпуклого n -угольника.

114. Докажите, что найдется бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы кубов трех натуральных чисел.

115. Пусть N — произвольное натуральное число, не меньшее 10. Зачеркнем последнюю цифру числа N и к полученному числу прибавим число, равное удвоенной зачеркнутой цифре. Получилось число N_1 . Докажите, что либо числа N и N_1 оба делятся на 19, либо оба числа на 19 не делятся.

116. Доказать, что площадь четырехугольника со сторонами a, b, c, d не больше $\frac{ac + bd}{2}$.

117. Через $n!$ обозначают произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Известно, что число $35!$ равно

$$10333147966386144929 \times 66651337523200000000.$$

Найти цифру, замененную звездочкой.

118.а. Докажите, что нельзя выписать в строку 50 действительных чисел так, чтобы сумма любых 7 идущих подряд чисел была положительна, а сумма любых 11 идущих подряд чисел — отрицательна?

6. Выпишите в строку 50 чисел так, чтобы сумма любых 47 стоящих подряд чисел была положительна, а сумма любых 11 стоящих подряд чисел — отрицательна.

119. Найти все двузначные числа, квадрат которых равен кубу суммы их цифр.

120. В коридоре длиной 100 м постелено 20 ковровых дорожек общей длиной 1000 м. Ширина дорожки равна ширине коридора. Дорожки лежат без складок и в некоторых местах перекрываются. Каким может быть наибольшее число незастеленных участков коридора?

121. Докажите, что при делении любого простого числа на 30 в остатке получится также простое число или единица.

122. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике два противоположных угла тупые, то они опираются на большую диагональ.

123. Доказать, что никакое простое число нельзя представить двумя различными способами в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

124. В классе имеется a_1 учеников, получивших в течение года хотя бы одну двойку, a_2 учеников, получивших не менее двух двоек, ..., a_k учеников, получивших не менее k двоек. Сколько всего двоек в этом классе? (Предполагается, что ни один ученик не получил более чем k двоек.)

125. Найти наименьшее целое положительное число, половина которого — полный квадрат, одна треть — полный куб, одна пятая — полная пятая степень.

126. Обозначим через $n?$ (« n вопросил») произведение всех простых чисел, не превосходящих n (для $n \geq 2$). Найдите все значения n , для которых $n? \leq n$.

127. Дан выпуклый четырехугольник. Найти внутри него такую точку, чтобы отрезки, соединяющие эту точку с серединами сторон, делили четырехугольник на четыре части с равными площадями.

128. Рассмотрим всевозможные равносторонние треугольники $РКМ$, одна из вершин которых — $Р$ — фиксирована, а другая — $К$ — лежит в заданном квадрате Q . Где может располагаться третья вершина — $М$?

129. Даны два отрезка AB и CD , лежащие в одной плоскости. Найти точку O такую, что угол AOB равен углу COD и треугольники AOB и COD подобны.

130. В клетках квадратной таблицы размера $n \times n$ расставлены числа. Сумма чисел, стоящих в любом «кресте», не меньше a . (Под «крестом» понимается фигура, составленная из одного полного столбца и одной полной строки.)

Какое наименьшее значение может иметь сумма всех чисел таблицы?

131. На плоскости проведены 1 000 000 попарно не параллельных прямых. Через точку пересечения любых двух из этих прямых проходит по меньшей мере еще одна из проведенных прямых. Доказать, что все прямые проходят через одну точку.

132. Солнце на экваторе находится в зените. Как надо расположить спичечный коробок, чтобы его тень на столе закрывала наибольшую площадь? Тот же вопрос для пакета, в котором продается молоко (треугольная пирамида).

133. На шести гранях куба написаны шесть чисел, среди которых есть 0 и 1. Каждое из шести чисел заменили средним арифметическим четырех чисел, стоящих на четырех соседних гранях. С новыми числами повторили ту же операцию, и так 25 раз. В результате на каждой грани оказалось написанным то же самое число, что и в начале. Докажите, что в вычислениях была допущена ошибка.

134. Восемь вершинам куба поставлены в соответствие восемь чисел, среди которых есть 0 и 1. Каждое из восьми чисел заменили средним арифметическим трех чисел, поставленных в соответствие трем соседним вершинам. После десяти повторений этой операции в каждой вершине оказалось то же число, что и в начале. Найдите эти восемь чисел.

135. Внутри произвольной трапеции указать такую точку, для которой сумма расстояний до сторон трапеции или их продолжений является наименьшей.

136. Выбрать три попарно различных натуральных числа k, l, m так, чтобы сумма $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$ была меньше $\frac{1}{2}$ и возможно ближе к $\frac{1}{2}$.

Выбрать четыре попарно различных натуральных числа k, l, m и n так, чтобы сумма $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ была меньше 1 и возможно ближе к 1.

137. Какое наибольшее число раз может отразиться луч от сторон угла в 1° ? (При каждом отражении угол падения равен углу отражения.)

138. Луч света отражается многократно от сторон равностороннего треугольника ABC . Предположим, что в течение некоторого времени он отразился 4 раза от стороны AB , x раз от стороны AC и y раз от стороны BC . Какие значения могут принимать x и y (указать все возможности)?

139. На шахматной доске, составленной из 10×10 клеток, рассматривается фигура (назовем ее «лев»), которая может ходить на одну клетку вправо, на одну клетку вниз и на одну клетку по диагонали влево вверх. Может ли лев обойти по одному разу все клетки доски и вернуться последним ходом на исходное поле?

140. Двойными шахматами называется игра, отличающаяся от обычных шахмат только тем, что каждый из противников может делать по два хода подряд. Докажите, что при такой игре белые всегда могут выиграть или по крайней мере добиться ничьей.

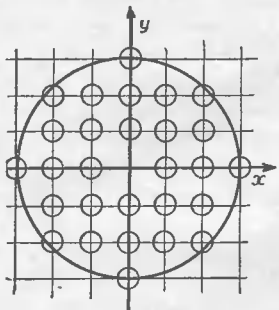


Рис. 10.

141. До какой толщины должны вырасти стволы в правильно засаженном парке *), имеющем форму круга радиуса s (рис. 10), чтобы они полностью заслонили вид из центра? Докажите, что вид не заслонен, если радиусы всех деревьев

меньше $\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$, и заслонен, если

радиусы всех деревьев больше $1/s$.

142).** На планете, имеющей форму шара, расположено некоторое число государств. Каждое государство состоит из одной или двух частей, не сообщающихся друг с другом.

Требуется раскрасить карту этой планеты так, чтобы территория одного государства была закрашена одной краской, а государства, имеющие общую границу, были закрашены разными красками. Докажите, что двенадцати красок для этой цели всегда достаточно, но одиннадцати красок может и не хватить.

143. На двух планетах расположено некоторое число государств, причем некоторые страны расположены только на одной планете, а другие имеют часть территории на одной и часть территории на другой планете. (Территория

*) Парк считается правильно засаженным, если центры деревьев совпадают с вершинами квадратов со стороной 1.

**) О раскраске карт советуем прочитать, например, § 13 книги Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры» (изд. 3, Физматгиз, 1962) или раздел I книги Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского «Математические беседы» (серия «Библиотека математического кружка», Гостехиздат, 1952).

каждого государства на каждой планете не распадается на несообщающиеся части.)

Докажите, что 12 красок всегда достаточно для того, чтобы раскрасить карту двух планет с соблюдением условий задачи 142. Докажите, что семи красок может и не хватить.

144. Имеется куча камней. Двое играющих берут из нее по очереди камни. Каждый может взять один, два или три камня. Выигрывает тот, кто берет последние камни. При каком числе камней в куче начинающий выигрывает (т. е. может добиться победы, как бы ни играл его партнер)?

145. а. Двое играют на шахматной доске, передвигая по очереди одного короля. Допускаются ходы на одно поле влево, вниз и влево-вниз по диагонали. Выигрывает тот, кому удастся поставить короля на левый нижний угол. При каких начальных положениях короля выигрывает начинающий, а при каких его партнер?

б. Имеются две кучи камней. Двое играющих забирают по очереди камни. Разрешается взять один камень из любой кучи или по одному камню из обеих куч. Выигрывает взявший последние камни. При каком числе камней в кучах выигрывает начинающий?

146. Исследуйте игры, аналогичные игре задачи 145, с той разницей, что передвигается

а) ладья (разрешается ходить лишь влево или вниз),

б) ферзь (допускаются ходы лишь влево, вниз и влево-вниз по диагонали),

в) конь (допускаются лишь ходы: на два поля влево и одно вверх или вниз, либо на два поля вниз и одно влево или вправо).

147. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ ($a > b$) отмечаются середины диагоналей — точки B_1 и C_1 . В четырехугольнике AB_1C_1D вновь отмечаются середины диагоналей — точки B_2 и C_2 . На n -м шагу отмечаются точки B_n и C_n .

а) Найти длину отрезка B_nC_n .

б) К какому пределу стремится длина B_nC_n при неограниченном возрастании n ?

в) Для каких трапеций все отрезки B_nC_n равны между собой?

148. Имеется некоторое количество гирь. Вес любой гири не превосходит 500 г. Известно, что гири нельзя разбить на две группы так, чтобы вес каждой группы превосходил 500 г. Найти наибольший возможный общий вес гирь.

149. Четыре прямые на плоскости расположены так, что никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. По каждой из прямых с постоянной скоростью движется пешеход. (Скорости различных пешеходов могут быть различны.) Известно, что первый пешеход встретился со вторым, третьим и четвертым, а второй — с третьим и четвертым. Доказать, что третий пешеход встретился с четвертым.

150. Призеры футбольного турнира набрали соответственно 7, 5 и 3 очка. Сколько в турнире участвовало команд и сколько очков набрала команда, занявшая последнее место? (За выигрыш дается 2 очка, за ничью 1, за поражение 0. Если две команды набирают одинаковое число очков, то место определяется по разности числа забитых и пропущенных голов.)

151. Город Зурбаган ограничен кольцевой дорогой. Все улицы начинаются и кончаются на этой дороге и никакие две улицы не имеют двух различных пересечений. Части, на которые улицы разбивают город, называются микрорайонами. В городе ввели одностороннее движение по всем улицам и кольцевой дороге. Докажите, что хотя бы один микрорайон можно объехать вокруг, не нарушая правил движения.

152. Имеется n гирь с весами 1, 2, 3, 4, ..., n г. Их надо разложить на 3 равные по весу кучки. При каких n это удастся сделать?

153. На прямоугольном столе лежат 15 журналов, полностью закрывая его. Доказать, что можно убрать 7 журналов так, чтобы оставшиеся закрывали не менее $8/15$ площади стола. Говоря более формально: некоторый прямоугольник полностью покрыт 15 меньшими прямоугольниками. Доказать, что можно убрать 7 из них так, чтобы оставшиеся покрывали не менее $8/15$ площади исходного прямоугольника.

154. На биссектрисе прямого угла взята точка P . Через нее проводится произвольная прямая, отсекающая на сторонах угла отрезки длиной a и b . Доказать, что величина $1/a + 1/b$ не зависит от того, какая прямая проводится через точку?

155. Сто разных фишек положены в один ряд. Любые две фишки, стоящие через одну, можно менять местами. Удастся ли переставить фишки в обратном порядке?

156. Выпуклый 17-угольник разбит диагоналями на меньшие многоугольники. Какое наибольшее число сторон может оказаться у многоугольника разбиения?

157. Рассматриваются все натуральные числа, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 0 и 1. Разбейте эти числа на две группы так, чтобы в десятичной записи суммы любых двух различных чисел из одной и той же группы, содержалось не менее двух единиц.

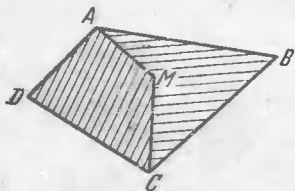


Рис. 11.

158. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис. 11). Найти геометрическое место точек M таких, что площади фигур $ABCM$ и $ADCM$ равны.

159. Имеется семь одинаковых по виду монет, но среди них пять монет настоящие, а две фальшивые. Настоящие монеты весят по 10 г, а фальшивые по 9,8 г. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь надо сделать, чтобы наверняка выделить фальшивые монеты?

160. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых выражаются целыми числами. Доказать, что произведение этих четырех чисел представляет собой точный квадрат.

161. В коробке 27 спичек. Двое играющих берут по очереди одну, две, три или четыре спички. Выигрывает тот, у кого после окончания игры окажется четное число спичек.

а) Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

б) Каков ответ в более общем случае, когда в коробке находится $2n + 1$ спичек, а брать разрешается любое число спичек от 1 до m ?

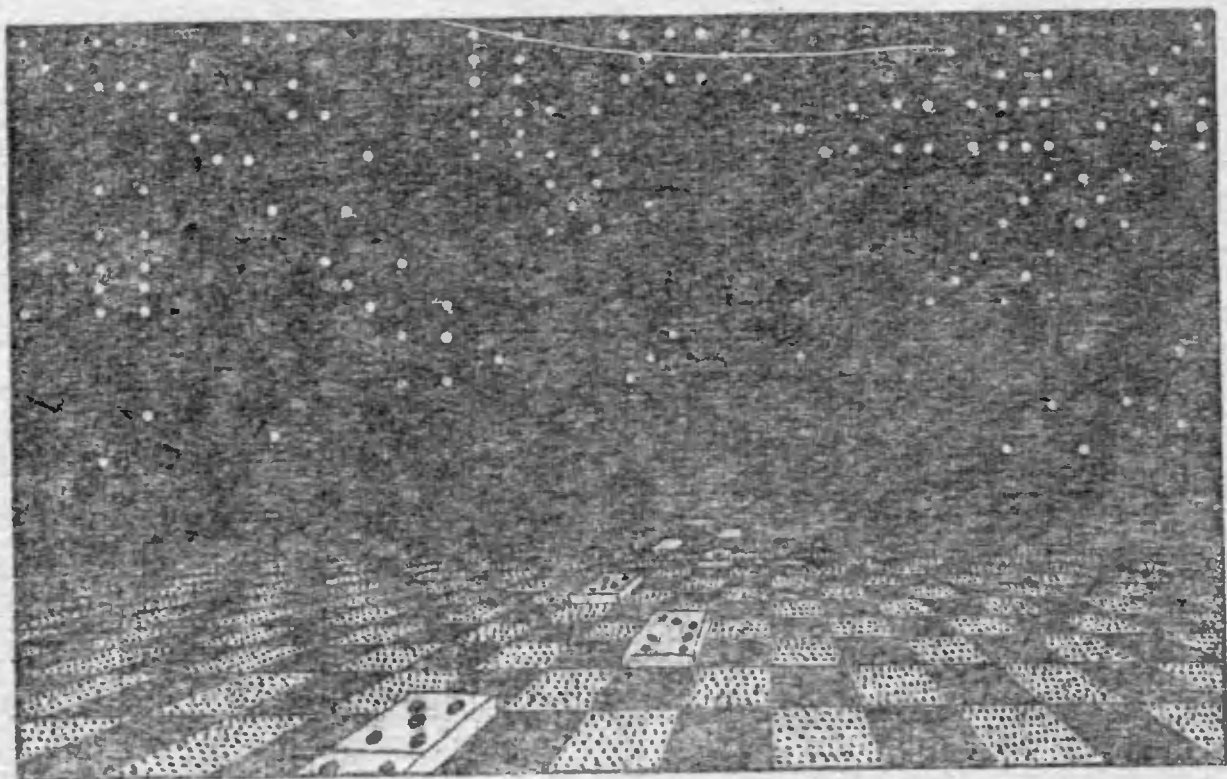
162. Найти наибольший общий делитель 1000-го и 770-го чисел Фибоначчи. (Рядом Фибоначчи называется последовательность

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...,

в которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих.)

163*). Описать все многозначные числа, обладающие следующим свойством: если переставить цифры в обратном порядке, то получится число, которое является делителем первоначального, причем частное отлично от единицы. (Предполагается, что данное число не оканчивается нулем.

*) Задача предложена Г. Е. Шиловым.



РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

1. Одно из возможных решений представлено на рис. 12. Несколько видоизменив этот рисунок, можно получить решение и второй части задачи (рис. 13).

2.а. Надо задавать вопросы так, чтобы каждый последующий вопрос уменьшал вдвое количество остающихся возможных вариантов. При такой системе, чтобы угадать один из 2^n вариантов, достаточно n вопросов. Так как по условию имеется всего $10^5 < 2^{17}$ различных телефонных

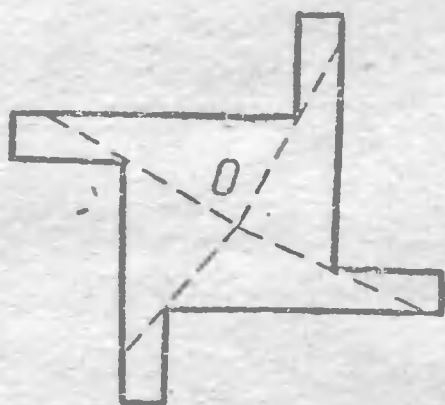


Рис. 12.

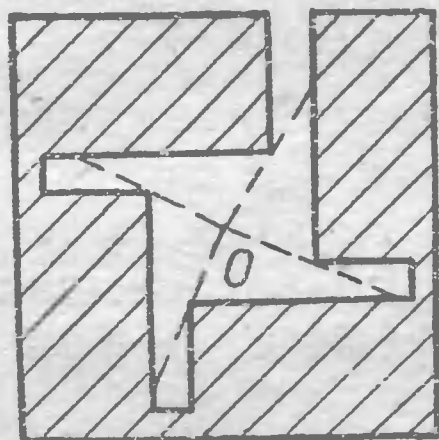


Рис. 13.

номеров, то хватит 17 вопросов. Сами вопросы можно задавать по-разному. Например, можно спросить: «Верно ли, что ваш номер больше 50 000?» Если ответили «да», то второй вопрос может быть такой: «Больше ли он 75 000?» и т. д.

Но проще воспользоваться двоичной системой счисления*), в которой есть только две цифры: 0 и 1. Каждое число, меньшее 100 000,

*) О двоичной системе счисления вы можете прочесть, например, в книгах: Г. Н. Берман, Число и наука о нем, изд. 3, Физматгиз, 1960; 2. С. В. Фомин. Системы счисления, «Наука», 1964; 3. Дополнительные главы по курсу математики 7—8 классов для факультативных занятий, «Просвещение», 1969.

запишется не более чем 17 такими цифрами. Можно задавать такие вопросы:

1) Верно ли, что последняя цифра двоичной записи номера вашего телефона единица?

2) Верно ли, что предпоследняя цифра единица? и т. д.

Покажем теперь, что 16 вопросов недостаточно. Действительно, различных комбинаций из 16 слов «да» и «нет» имеется 2^{16} . Поскольку $100\,000 > 2^{16}$, то два различных телефонных номера приведут к одинаковой последовательности ответов, и у нас не будет никакой возможности решить, какой из них истинный.

Примененный здесь принцип «деления пополам» полезен во многих задачах, например в известной игре, где задумывается фамилия знаменитого человека и разрешается задавать любые вопросы, на которые можно ответить «да» или «нет».

Надо стремиться ставить вопросы так, чтобы положительный и отрицательный ответы каждый раз казались вам одинаково вероятными. Например, плохо начинать с вопроса: «биолог?». Гораздо лучше спросить: «ученый?».

6. Для решения задачи достаточно 22 вопросов. При этом можно действовать, например, так. Сначала 15 вопросами выясните последние 15 из 17 цифр, содержащихся в двоичной записи телефонного номера. Затем спрашиваете: «Соглали ли вы в одном из 15 ответов?» Если отвечают «да», то либо один из первых 15 ответов, либо последний ложны. Методом «деления пополам» вы четырьмя вопросами узнаете, в каком же из 16 ответов ложь, а затем двумя вопросами выясните оставшиеся две цифры. Если же на 16-й вопрос ответили «нет», значит, действительно не лгали, и полученные вами 15 цифр — верные (в противном случае ложь содержалась бы в двух ответах, в одном из первых 15 и в 16-м, а это противоречит условию). Для того чтобы узнать оставшиеся две цифры, достаточно 5 вопросов. Например, можно про каждую цифру спрашивать дважды, а если ответы противоречат друг другу, повторить тот же вопрос третий раз.

3. Школу надо построить в деревне А.

4. Пусть O — центр данной окружности радиуса R , A — произвольная точка на окружности (рис. 14). Отправляясь от A и делая циркулем с раствором, равным R , засечки на окружности, найдем точку B , диаметрально противоположную A . Проведем циркулем с тем же раствором дуги окружностей с центрами в точках A и B и найдем на них точки A_1 и B_1 , симметричные точке O относительно точек A и B . После этого проводим радиусами, равными $3R$ с центрами A_1 и B_1 две дуги до пересечения в точке P . Легко видеть, что $OP = R\sqrt{5}$. Теперь проведем дугу радиуса $OP = R\sqrt{5}$ с центром в точке B_1 , пересекающую данную окружность в точках C и D . Легко доказать, что точки A , C , B и D являются вершинами квадрата и, значит, удовлетворяют условию.

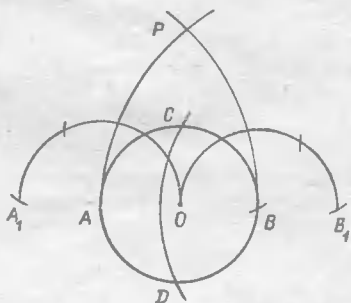


Рис. 14.

5. Если распилить третье звено, то цепочка распадается на три части (рис. 15). С их помощью удастся расплатиться, так как хозяин может давать сдачу звеньями, полученными им ранее.



Рис. 15.

6. Предварительно докажите, что справедлива следующая

Л е м м а. Если E и F — середины сторон BC и AD произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$, то площадь треугольника AED равна сумме площадей треугольников ABF и FCD .

Пусть теперь $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 16), $PQRS$ — средний из пяти четырехугольников, на которые прямые разделили $ABCD$, причем сторона PS лежит на AD .

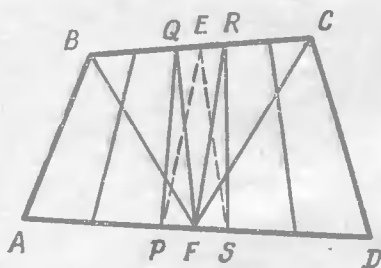


Рис. 16.

Пусть E и F — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что площадь треугольника QFR в пять раз меньше площади треугольника BFC . Затем примените лемму к паре треугольников ABF и FCD и к паре треугольников PQF и FRS .

7. Пусть, например, поезда идут в каждую сторону с интервалом в 3 мин. При этом расписание может быть составлено так, что, пропустив поезд, идущий к центру, вы должны будете 1 мин. ждать поезда из центра, а пропустив поезд из центра,

будете ждать очередного поезда к центру 2 мин. (см. рис. 17, на котором темными кружками отмечены прохождения поездов к центру и светлыми кружками — моменты прохождения поездов из центра).

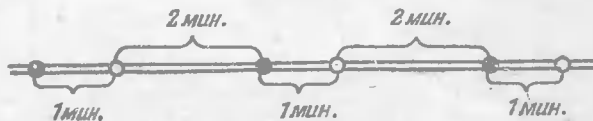


Рис. 17.

Поэтому вдвое более вероятно, что вы попадете на станцию в один из двухминутных интервалов и, следовательно, попадете на поезд, идущий к центру.

8. Пусть $S_{\triangle ABC} < S_{\triangle ACD}$. Постройте равновеликий треугольник ABC треугольник ACE с основанием EC , лежащим на продолжении DC . В треугольнике EAD проведите медиану AF (рис. 18).

9. Заметьте сначала, что если у путешественника имеется цепочка, состоящая из $n = (k+1)2^{k+1} - 1$ звеньев, то он может распилить k звеньев так, чтобы получились куски, состоящие соответственно из $(k+1)$, $2(k+1)$, $2^2(k+1)$, ..., $2^k(k+1)$ звеньев. Располагая этими кусками и k распиленными звеньями, путешественник может расплавиться с хозяином в течение n дней. Если число n звеньев цепочки не представляется в виде $n = (k+1)2^{k+1} - 1$, то надо рассмотреть наименьшее целое число k такое, что $n < (k+1)2^{k+1} - 1$. В частности, если $n = 100$, то достаточно распилить $k = 4$ звена.

10. Стрелки впервые совпадут в 13 час.

$5\frac{5}{11}$ мин.

11. Задача не требует никаких вычислений. Очевидно, сколько убавилось чая в одном из стаканов, столько в нем добавилось молока. Поэтому чая в молоке всегда столько же, сколько молока в чае, независимо от степени перемешивания или числа переливаний.

12. Занумеруйте штырьки цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 по часовой стрелке, а гнезда — теми же цифрами против часовой стрелки.

Можно придумать и другие способы нумерации.

13. Допустим, что период существует и состоит из n цифр. Так как в натуральном ряде сколь угодно далеко от начала встречаются числа, содержащие подряд $2n$ нулей, то период должен состоять из одних нулей. Аналогичное рассуждение показывает, что период состоит из одних единиц. Противоречие!

14. Самолет должен лететь на север. Действительно, кратчайший путь между двумя точками на поверхности земного шара проходит по дуге большого круга, соединяющей эти точки. Так как восточная долгота Ашхабада $\approx 58^\circ$, западная долгота Сан-Франциско $\approx 122^\circ$ и $58^\circ + 122^\circ = 180^\circ$, то большой круг, проходящий через эти два города, совпадает с ашхабадским и сан-францисским меридианами.

Отметим, что Ашхабад и Сан-Франциско лежат (приблизительно) на одной параллели (38° сев. широты). Попробуйте подсчитать, на сколько длиннее путь вдоль параллели, чем путь по меридиану через северный полюс.

15. Запишем число в таком виде:

$$N = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_i \text{ — цифры.}$$

Заметьте, что $a_0 \cdot a_1 \dots a_n \leq a_n \cdot 9^n$.

16. Пусть M — середина отрезка O_1O_2 . Проведите на рис. 3 отрезки O_1B , O_1C , O_2B и O_2C . Воспользовавшись тем, что треугольники O_1BO_2 и O_1CO_2 — прямоугольные, выразите углы $\angle BMO_1$ и $\angle CMO_1$ через углы исходного треугольника. Далее покажите, что $\angle BAC + \angle BMC = 180^\circ$.

17. Сначала следует забрать одним ходом все камни из одной кучи, а затем каждым ходом уравнивать число камней в двух оставшихся кучах.

18.а. Доказательство проведем индукцией по числу n клеток многоугольника. При $n = 1$ и $n = 2$ утверждение задачи очевидно. Пусть

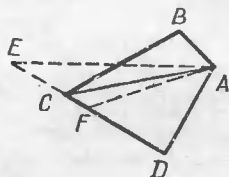


Рис. 18.

оно выполняется при $n = k$, где $k \geq 2$. Рассмотрим многоугольник M_{k+1} , состоящий из $k + 1$ клеток. Разобьем его каким-то способом на многоугольник M_k из k клеток и отдельную клетку t . Искомый центр тяжести лежит на прямой l , проходящей через центры тяжести M_k и t , которые, по предположению индукции, можно отыскать с помощью линейки. Разобьем M_{k+1} на две части \bar{M}_k и \bar{t} другим способом, но так, чтобы центр тяжести клетки \bar{t} не лежал на уже построенной прямой l . Легко видеть, что это всегда можно сделать. Строим прямую \bar{l} , соединяющую центры тяжести \bar{M}_k и \bar{t} .

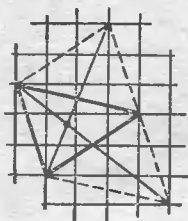


Рис. 19.

б. Для нахождения центра тяжести треугольника нужно провести его медианы, а это легко сделать, различными способами достраивая треугольник до параллелограмма (рис. 19).

в. Сначала следует доказать, что всякий многоугольник может быть разбит своими диагоналями на треугольники (см., например, решение задачи 108 в книге: Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы планиметрии, «Наука», 1967). Далее рассуждения проводятся по тому же плану, что и в задаче 18а, с использованием результата задачи 18б.

19. Докажем, что не смогут. Занумеруем деревья по порядку числа от 1 до 44. Пусть в какой-то момент число чижей на первом дереве — n_1 , число чижей на втором дереве — n_2 и т. д. Рассмотрим такую сумму

$$S = 1 \cdot n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + 44n_{44}.$$

Когда два чижа перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях, то эта сумма либо вовсе не меняется, либо изменяется сразу на 44. Поэтому остаток от деления S на 44 не изменяется. В первый момент $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 44 = 44 \times 45 : 2 = 990$, остаток от деления S на 44 равен 22. Если бы в некоторый момент все чижи собрались на одном дереве, то эта сумма стала бы делиться на 44 без остатка, что невозможно.

Решите ту же задачу, заменив в условии число 44 произвольным натуральным числом.

20. Браун — преступник. Джонс оба раза солгал, Смит оба раза сказал правду.

21. Докажем, что сумма возрастов 20 самых старших ребят не меньше 280 лет. Если самому младшему из двадцати уже исполнилось 14 лет, то и остальным не меньше 14, а всем вместе не меньше $14 \times 20 = 280$ лет. Если же самому младшему меньше 14 лет, то каждому из 11 ребят, которые его моложе, тоже нет еще 14 лет, всем 11 вместе меньше чем $14 \times 11 = 154$, а на долю 20 старших и в этом случае остается не меньше чем $434 - 154 = 280$ лет.

22. а. Заметьте, что после вычеркивания остается одиннадцать цифр. Можно вычеркнуть цифры так, чтобы осталось число 00000123450. Докажите, что меньшего числа получить нельзя.

б. Надо вычеркнуть цифры так, чтобы осталось число 99999785960.

23. Через любые две из данных 4000 точек можно провести прямую. Проведем всевозможные такие прямые, а затем выберем на плоскости точку O , не лежащую ни на одной из этих прямых. Проведем из точки O

лучи по направлению к каждой из 4000 точек. Точка O выбрана так, что никакие два из этих лучей не совпадут. Занумеруем лучи по часовой стрелке, начав, скажем, с луча OA (рис. 20): $L_1, L_2, L_3, \dots, L_{4000}$.

Теперь разобьем все лучи на группы по 4 луча: в первой группе — лучи L_1, L_2, L_3, L_4 , во второй — лучи L_5, L_6, L_7, L_8 и т. д. Легко видеть, что четырехугольник с вершинами, лежащими на лучах какой-то одной группы, не пересекается с четырехугольником, вершины которого принадлежат другой группе лучей.

24. Отложив угол в 19° девятнадцать раз, мы получим угол в 361° и, таким образом, построим угол, равный 1° .

25. Рассмотрите наименьшее из чисел вида $\frac{1}{2^m}$, содержащее-

ся в сумме $\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, и докажите, что при приведении к общему знаменателю дополнительный множитель этого числа будет нечетным, а дополнительные множители остальных чисел будут четными.

26. Пусть делегат A может объясниться с тремя другими делегатами, назовем их B, C и D . Среди последних по крайней мере двое также могут объясниться между собой, скажем, B и C . Тогда A, B, C — искомая тройка. Если же A может объясниться не более чем с двумя другими делегатами, то найдутся три делегата E, F и G , ни с одним из которых A не может говорить. Тогда E, F, G образуют искомую тройку. (Доказать!)

27. Ходы ладьи $g7$: $Lg7 - g6 - g5 - g4 - g3 - g2 - g1$.

28. Опустите перпендикуляр OP из центра окружности O на диагональ, не являющуюся диаметром (рис. 21).

29. Докажите, что для размена 25 рублей купюрами достоинством в 1, 3 и 5 рублей необходимо нечетное число купюр.

30. Рассмотрим два случая.

1. Пусть точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — вершины выпуклого пятиугольника. Наименьший внутренний угол этого пятиугольника не превосходит 108° .

Предположим, для определенности, что это угол при вершине A_1 . Диагонали A_1A_3 и A_1A_4 делят этот угол на 3 части, наименьшая из которых не превосходит 36° . Поэтому в случае $1 \alpha \leq 36^\circ$. Равенство $\alpha = 36^\circ$ имеет место в правильном пятиугольнике.

II. Пусть точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 не являются вершинами выпуклого пятиугольника. Докажите сначала, что одна из этих пяти точек лежит внутри треугольника, образованного тремя другими точками. Пусть, например, точка A_4 лежит внутри треугольника $A_1A_2A_3$. Соединив A_4 с A_1, A_2 и A_3 , мы разобьем каждый угол треугольника на 2 части.

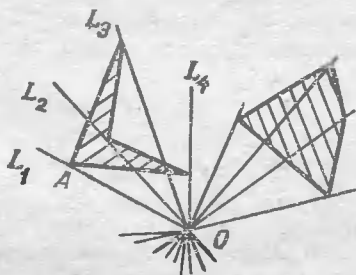


Рис. 20.

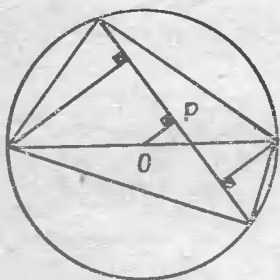


Рис. 21.

Наименьшая из этих частей не превосходит $180^\circ : 6 = 30^\circ$. Поэтому в случае II $\alpha \leq 30^\circ$.

Итак, искомое максимальное значение $\alpha = 36^\circ$.

31. Если одно из чисел x, y, z равно нулю, то и другие, очевидно, равны нулю. Покажем, что других решений нет. Пусть x, y и z отличны от нуля. Тогда $x = 2^m x_1, y = 2^n y_1, z = 2^p z_1$, где числа x_1, y_1, z_1 — нечетные. Пусть например, $m \leq n \leq p$. Тогда обе части данного равенства можно сократить на $(2^m)^2$. Получившееся равенство можно записать в виде

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2^{s+1} uvw \quad (s \geq 0),$$

где u и v — нечетные числа, а w — число четное. Докажите, что правая часть равенства должна делиться на 4, а левая нет. Получено противоречие.

32. Из точки C проведите отрезок CF , равный и параллельный AB . Рассмотрите треугольник CFD .

33. Предварительно докажем две леммы:

Лемма 1. Для каждой остановки можно указать маршрут, который через нее не проходит.

Если через данную остановку K (рис. 22, а) проходит только один маршрут, то все остальные через нее не проходят. Допустим, что через K проходят какие-нибудь два маршрута, например KL и KM (буквами L и M обозначены отличные от K остановки на этих маршрутах). В силу условия В) есть маршрут LM , проходящий через L и M . Этот маршрут не может проходить через K . Действительно, маршрут LM отличен от KL или от KM , а в силу условия Б) два различных маршрута имеют только одну общую остановку. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Через каждую остановку проходят три маршрута.

Согласно условию В), с остановки N (рис. 22, б) на остановку P маршрута PQR , не проходящего через N , можно проехать некоторым

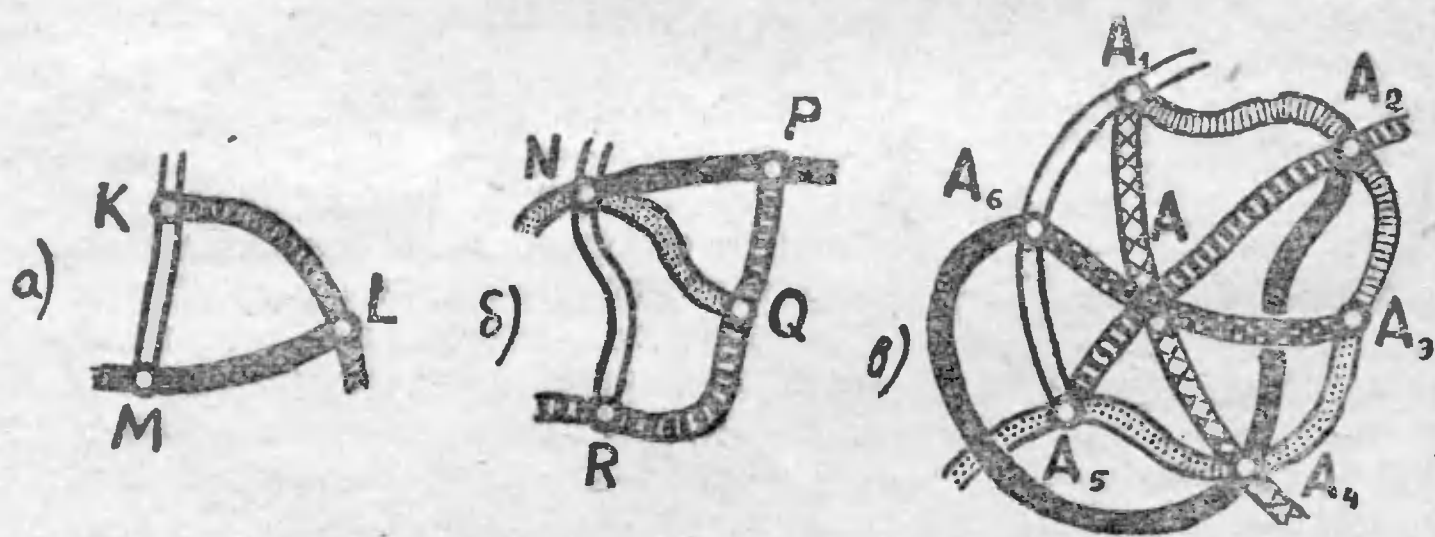


Рис. 22.

маршрутом NP , который в силу условия Б) не проходит через Q и R . Так же доказывается, что должны быть маршруты NQ и NR , отличные от NP и друг от друга. Всякий маршрут, проходящий через N , имеет в силу условия Б) общую остановку с маршрутом PQR и, значит, совпадает с одним из трех маршрутов NP, NQ или NR . Лемма 2 доказана.

На каждом из трех маршрутов, проходящих через N , есть еще по две остановки. В силу условия В) с остановки N на любую другую мож-

но проехать одним из этих трех маршрутов. Значит, в городе всего 7 остановок. Через 7 остановок проходит всего $7 \cdot 3 = 21$ маршрут, но при этом каждый маршрут считается трижды (ибо он проходит через три остановки). Значит, общее число маршрутов равно семи. На рис. 22, в изображена соответствующая схема маршрутов.

34. Допустим, что это невозможно. Заномеруем карточки числами от 1 до 12 в направлении часовой стрелки (начиная с любого места). Присвоим каждому гостю номер, который написан на его карточке. Повернем стол так, чтобы первая карточка оказалась около первого гостя. Пусть при этом против i -го гостя окажется a_i -я карточка ($a_i = 1, 2, \dots, 12$). Для того чтобы i -й гость оказался против своей карточки, надо повернуть стол против часовой стрелки на угол $b_i \cdot 30^\circ$, где

$$b_i = \begin{cases} i - a_i, & \text{если } i > a_i, \\ i - a_i + 12, & \text{если } i \leq a_i. \end{cases}$$

Докажите, что b_i принимает все значения 1, 2, ..., 12. Складывая b_i , получим

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{12} = (1 + 2 + \dots + 12) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{12}) + 12k = 12k,$$

где k — какое-то целое число. Но

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = b_1 + b_2 + \dots + b_{12} = 1 + 2 + \dots + 12 = 78.$$

Так как 78 не делится на 12, то приходим к противоречию.

35. Из вершины C под углом 60° к AC провести прямую, пересекающую AB в точке F , а AD в точке O (рис. 23). Доказать, что $\triangle EFD = \triangle EOD$. Отсюда следует, что $\angle ADE = 30^\circ$.

36. Пусть OE — прямая, по которой пересекаются плоскости AOC и DOB . Через произвольную точку на оси OE провести прямые KL (в плоскости AOC) и MN (в плоскости DOB) так, чтобы OE в двух полученных треугольниках была медианой (рис. 24).

Другой способ: провести плоскость, параллельную линиям пересечения противоположных граней, и рассмотреть сечение палатки этой плоскостью.

37. Решение показано на рис. 25.

38. Заметьте, что если бы такая прямая существовала, то по обе стороны от нее лежало бы одно и то же число вершин многоугольника.

39. Если на некотором шаге получается 9 единиц, то на предыдущем шаге должно было быть либо 9 единиц, либо 9 нулей. Пусть на n -м шаге впервые появилось 9 единиц. Тогда на $(n - 1)$ -м шаге стояли 9 нулей. Следовательно, на $(n - 2)$ -м шаге цифры чередовались, а это значит, что на 1-м, 3-м, 5-м, 7-м и 9-м местах (считая от некоторого места

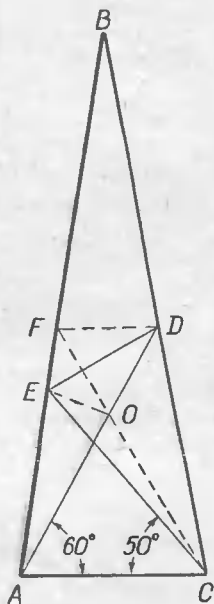


Рис. 23.

по часовой стрелке) стояли одинаковые цифры. Но места 1-е и 9-е — соседние, и там одинаковые цифры стоять не могли. Противоречие.

40. Рассмотрите наибольшее из ребер пакетика и покажите, что к нему не может прилегать тупой угол.

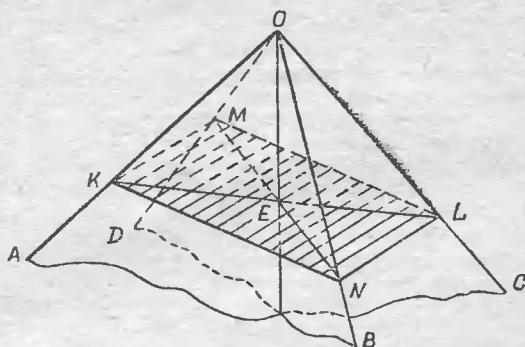


Рис. 24.

41. Обозначим заданные числа через n_1, n_2, \dots, n_{100} и рассмотрим суммы $S_1 = n_1, S_2 = n_1 + n_2, S_3 = n_1 + n_2 + n_3, \dots, S_{100} = n_1 + n_2 + \dots + n_{100}$. Допустим, что ни одна из них не делится на 100.

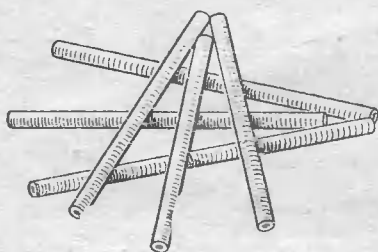


Рис. 25.

Тогда они при делении на 100 могут дать только 99 различных остатков: 1, 2, 3, ..., 99, и поэтому обязательно найдутся две суммы, которые дадут одинаковый остаток. Пусть это будут, например, S_{21} и S_{87} . Тогда

$$n_{23} + n_{23} + n_{24} + \dots + n_{86} + n_{87} = S_{87} - S_{21}$$

делится на 100.

42. Подсчитайте, какое наибольшее число очков мог набрать шахматист, занявший второе место, и какое наименьшее число очков могли вместе набрать шахматисты, занявшие 5—8-е места.

Докажите, что шахматисты, занявшие места с 5-го по 8-е проиграли все партии шахматистам, занявшим первые 4 места.

43а, б. Сначала докажите (скажем, по индукции), что справедлива следующая

Л е м м а. Пусть разложение числа m на простые множители имеет вид

$$m = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}.$$

Тогда число делителей m (включая 1 и m) равно

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_s + 1).$$

Число, о котором идет речь в задаче, обозначим его через k , делится на 2 и 9, поэтому

$$k = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_s^{n_s},$$

причем $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 2$. По лемме получаем

$$14 = (n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1) \dots (n_s + 1),$$

где $n_1 + 1 \geq 2$, $n_2 + 1 \geq 3$. Отсюда следует, что $n_1 + 1 = 2$, $n_2 + 1 = 7$ и число k не имеет простых делителей, отличных от 2 и 3. Значит, $k = 2 \cdot 3^6$.

Рассуждения при решении задачи 43б аналогичные. Если число делителей k равно 15, то возможны два варианта

$$k = 2^2 \cdot 3^4 \text{ или } k = 2^4 \cdot 3^2.$$

Ясно также, что число k не может иметь 17 делителей (как, впрочем, и любого другого простого числа делителей).

44. Точка пересечения диагоналей.

45. Покажите, что для возвращения в начальную точку пути улитка должна ползти одинаковое время по каждому из четырех направлений.

46. Если $7y^2 = 15x^2 - 9$, то y^2 , а следовательно, и y должны делиться на 3. Пусть $y = 3u$, тогда

$$5x^2 = 3 + 21u^2,$$

откуда заключаем, что $x = 3v$. Но в этом случае

$$7u^2 + 1 = 15v^2.$$

Покажите, что числа вида $7u^2 + 1$ никогда не делятся на 3.

47. Пусть первый ковер и второй перекрываются по площади S_1 , первый и третий — по площади S_2 , второй и третий — по площади S_3 , а все вместе — по площади S_4 . Покажите, что

$$6 = 9 - (S_1 + S_2 + S_3) + S_4.$$

48. Пусть a — наименьшее среди чисел таблицы; p, q, r, s — числа, стоящие в четырех соседних клетках. Из равенства $4a = p + q + r + s$ вытекает, что

$$(p - a) + (q - a) + (r - a) + (s - a) = 0.$$

Так как в скобках стоят неотрицательные числа, то

$$a = p = q = r = s.$$

Выведите отсюда, что все числа таблицы равны.

49. Число, состоящее из 300 единиц и любого числа нулей, делится на 3, но не делится на 9, а потому не может быть полным квадратом.

50. Нельзя, так как каждая костяшка покрывает одно белое и одно черное поле, а свободными должны остаться два поля одного цвета.

51. При делении большего из данных в условии задачи чисел на меньшее (обозначим их для краткости соответственно a и b) получится некоторое частное q и остаток 1111 , т. е. имеет место равенство $a = bq + 1111$. Перепишем его в виде $a - bq = 1111$. Отсюда видно, что всякий общий делитель чисел a и b , в том числе и наибольший, является делителем 1111 . Но число 1111 само является делителем a и b , а значит, оно является их наибольшим общим делителем.

Аналогично можно решить более общую задачу и найти наибольший общий делитель числа a , состоящего из n единиц, и числа b , состоящего

из m единиц. Повторяя деление с остатком многократно (алгоритм Евклида), можно показать, что искомым наибольшим общим делителем является число, состоящее из d единиц, где d — наибольший общий делитель m и n).

52. Вычислим сумму внутренних углов всех треугольников. Углы треугольников, имеющие вершину в данной внутренней точке, в сумме составляют 360° . Так как имеется 30 таких точек, то им соответствуют углы, сумма которых равна $360^\circ \cdot 30 = 10\,800^\circ$. Остаются неучтенными углы, вершины которых совпадают с вершинами 100-угольника. Понятно, что они составляют в сумме $180^\circ (100-2) = 17\,640^\circ$. Сумма внутренних углов всех треугольников равна $10\,800^\circ + 17\,640^\circ = 28\,440^\circ$. Сумма внутренних углов одного треугольника равна 180° , значит, число треугольников $\frac{28440}{180} = 158$.

В связи с этой задачей возникает такой вопрос: всегда ли можно разрезать 100-угольник, внутри которого расположено 40 точек, на треугольники так, как это описано в условии? Попробуйте доказать, что всегда.

53. Так как стороны угла симметричны относительно его биссектрисы, то симметрично отражая вершину, заданную на одной биссектрисе, относительно двух других биссектрис, получим две точки на стороне треугольника, противоположной этой вершине. Дальнейшие построения очевидны. Исследование возможности построения проведите самостоятельно.

54. Вопрос о том, с какой частотой встречаются различные буквы в русском тексте, важен, например, для составления наиболее удобных кодов при передаче по телеграфу, для расшифровки неизвестных шифров и др. Поэтому статистический эксперимент, подобный описанному в условии задачи, только с очень большими текстами, производился неоднократно.

В первой строке следующей таблицы приведены все буквы русского алфавита и знак пробела между словами. Во второй строке приведены частоты этих букв (среднее число раз, которое встречается каждая буква на тысячу букв текста**). В последующих строках приведены данные, полученные двумя учениками Вечерней математической школы. Так как каждый ученик подсчитал только одну тысячу знаков, случайные отклонения от средних данных второй строки, конечно, совершенно закономерны. Сравните ваши данные с приведенными в таблице.

| Пробел | О | Е — Ё | А | И | Т | Н | С | Р | В | Л | К | М | Д | П | У |
|--------|----|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 175 | 90 | 72 | 62 | 62 | 53 | 53 | 45 | 40 | 38 | 35 | 28 | 26 | 25 | 23 | 21 |
| 150 | 93 | 59 | 77 | 88 | 33 | 51 | 46 | 39 | 40 | 48 | 37 | 22 | 26 | 14 | 25 |
| 153 | 91 | 69 | 73 | 63 | 53 | 52 | 47 | 35 | 40 | 46 | 34 | 26 | 20 | 24 | 19 |

*) Об алгоритме Евклида можно прочитать, например, в книге: Г. Н. Берман, Число и наука о нем, изд. 3, Физматгиз, 1960.

**) Эти данные взяты из работы Д. С. Лебедева и В. А. Гармаша «О возможности увеличения скорости передачи телеграфных сообщений», Электросвязь, № 1, 1958, стр. 68—69.

| Я | Ы | Э | Ъ — Ь | В | Г | Ч | Й | Х | Ж | Ю | Ш | Ц | Щ | Э | Ф |
|----|----|----|-------|----|----|----|----|---|---|---|----|---|---|---|---|
| 18 | 16 | 16 | 14 | 14 | 13 | 12 | 10 | 9 | 7 | 6 | 6 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| 13 | 23 | 15 | 10 | 13 | 16 | 7 | 7 | 5 | 9 | 5 | 16 | 1 | 7 | 2 | 3 |
| 13 | 16 | 14 | 16 | 19 | 16 | 13 | 10 | 3 | 2 | 7 | 6 | 5 | 8 | 4 | 3 |

55. Начать расшифровку можно, например, так. В тексте встречается слово «ю». Но из гласных букв отдельные слова составляют только а, о, у, я, и. (Есть еще, правда, междомётные э, но оно всегда выделяется какими-нибудь знаками препинания.) По аналогичным причинам «ч» может означать только один из предлогов: в, к, с или частицу б. Если бы «ю» означало я, то в слове «лягня» встречалась бы три раза буква ю. Такое слово придумать очень трудно. Значения о и у для символа «ю» отпадают, так как после предлогов о и у не могут стоять слова в, к, с, б. Перед союзом а всегда ставится запятая, поэтому «ю» не может обозначать а. Итак, «ю» означает и, и значит, «и» означает ю. В дальнейшем мы будем это сокращенно записывать так: ю $\leftarrow \rightarrow$ и.)

Единственная гласная, которая ни разу не встречается в тексте в начале слова и после согласных, это «у». Поэтому й $\leftarrow \rightarrow$ у. Так как «я» и «е» встречаются в начале слов, то для у остаются только три возможности: «а», «о» и «э». Но э — очень редкая буква (см. таблицу), а знак «ы» встречается часто. Поэтому крайне маловероятно, чтобы э $\leftarrow \rightarrow$ ы. Если бы ы $\leftarrow \rightarrow$ о, то последние три буквы в первом слове были бы такие: ы, гласная, согласная. Это тоже маловероятно. Остается предположить, что ы $\leftarrow \rightarrow$ а. Для буквы э возможны теперь только значения «о», «я», «е». Слово «лягня» заставляет нас отбросить значение «я», а слова «пэжо» и «чтгыщюпмчо» — значения «о». Следовательно, э $\leftarrow \rightarrow$ е и, значит, о \rightarrow я. Это подтверждается и тем, что знак «е» встречается в тексте только один раз, и притом в начале слова, а знак «я» встречается семь раз. Такие частоты для зашифрованных этими знаками букв э и о вполне правдоподобны (см. таблицу).

Итак, мы расшифровали все гласные буквы. Подставив в текст их значения, читатель легко разгадает и значения согласных.

56. 75 шариков.

57. Пусть A, B, C, D — заданные точки (рис. 26). Проведите отрезок DF , перпендикулярный к отрезку AC и равный ему. Покажите, что точка F лежит на стороне искомого квадрата.

58. Соотношение $m^2 + (m+1)^2 = n^2 + (n+1)^4$ легко преобразовать к виду

$$m(m+1) = n(n+1)[n(n+1)+2].$$

Остается доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел не может равняться произведению двух натуральных чисел, отличающихся на два.

59. Обозначьте число восьмиклассников через x и покажите, используя первое условие, что общее число очков, набранных ими, равно

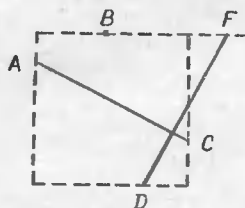


Рис. 26.

$\frac{x(x-1)}{2} + 2x - 7$. Выведите отсюда, используя второе условие, что 14 делится на x . Покажите, наконец, что для x возможны только значения 7 и 14 (составьте соответствующие турнирные таблицы).

60. Пусть ABC — данный треугольник, BH — высота, BM — медиана, BF — биссектриса, продолженная до пересечения с описанной окружностью (рис. 27). Покажите, что треугольник BMF равнобедренный. Выведите отсюда, что угол B прямой.

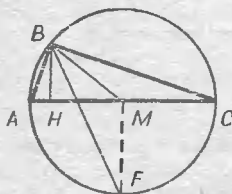


Рис. 27.

61. Так как общая площадь, занятая n монетами, меньше площади стола, то

$$n\pi r^2 < \pi R^2 \quad \text{или} \quad \sqrt{n} < R/r$$

Для доказательства второго неравенства «раздуем» каждую монету в два раза. Покажите, что «раздутые» монеты покрывают полностью круг радиуса $R - r$ (при этом неизбежны многочисленные наложения). Выведите отсюда неравенство $n4\pi r^2 > \pi(R - r)^2$,

которое эквивалентно соотношению $\sqrt{n} > (R/r - 1)/2$.

62. Заметьте, что каждое целое число a можно представить в виде $a = 2^k b$, где b — нечетное число, и что среди $10!$ нечетных чисел, не превосходящих 200, по крайней мере два окажутся равными друг другу.

63. Легко видеть, что найдутся числа 10^{k_1} и 10^{k_2} , дающие при делении на $9N$ одинаковые остатки. Их разность записывается девятками и нулями. Если поделить ее на 9, то получится число, составленное из единиц и нулей и делящееся на N .

64. Продолжим высоту AK и BH до пересечения с описанной окружностью в точках K_1 и H_1 (рис. 28). Дуги K_1C и CH_1 равны (так как равны углы HBC и KAC). Значит, радиус OC перпендикулярен к хорде K_1H_1 . Осталось доказать, что отрезок KH параллелен K_1H_1 . С этой целью установим, что KH — средняя линия в треугольнике K_1MH_1 . Из равенства дуг K_1C и CH_1 следует, что углы K_1AC и CAH_1 равны. Значит, равны треугольники MAN и HAH_1 и $MH = HH_1$. Аналогично доказывается, что $MK = KK_1$. Задача решена.

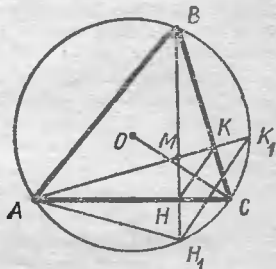


Рис. 28.

Наше решение относится к остроугольному треугольнику ABC . Случай тупоугольного треугольника рассмотрите самостоятельно.

Попутно мы доказали следующий полезный факт: если точку пересечения высот треугольника отразить от любой из его сторон, то получится точка, лежащая на описанной окружности.

65. Одно из возможных решений показано на рис. 29 (спички, расположенные наклонно, образуют с горизонтальным направлением углы по 30°).

66. Пусть искомое число состоит из n единиц. Так как оно делится на число $33\dots33$, записанное ста тройками, то его делителями будут 3 и $11\dots11$ (единица повторяется сто раз). Поэтому, с одной стороны, n должно быть кратно 3, с другой стороны, n должно быть кратно 100

(по этому поводу см. указание к задаче 51). Наименьшим числом, удовлетворяющим этим условиям, является $n = 300$. Итак, искомое число записывается 300 единицами.

67. Пусть таблица T_1 после некоторых преобразований, описанных в условии задачи, превратилась в таблицу T_2 , в которой число минусов наименьшее. Значит, при преобразованиях таблицы T_2 число минусов в ней не может уменьшиться. Такие таблицы мы будем называть минимальными. Докажем, что число минусов в минимальной таблице не может быть больше четырех. Действительно, в каждом столбце и строке минимальной таблицы стоит не более двух минусов (иначе, меняя соответствующий столбец или строку, мы бы уменьшили число минусов). Допустим, что существует минимальная таблица, в которой более четырех минусов. В некоторой ее строке A стоят два минуса. Обозначим через P и Q столбцы, в которых стоят эти минусы. Как-нибудь два из оставшихся минусов стоят в столбцах P и Q или в двух других столбцах. Меняя, если нужно, строку A , можно добиться, чтобы в двух столбцах таблицы стояло по два минуса. Рассмотрим теперь пятый минус. Он не может стоять ни в одном из рассмотренных выше столбцов, так как таблица минимальна. Пусть этот минус расположен в строке B . Меняя знак в одном или двух упомянутых выше столбцах, добиваемся того, чтобы в строке стояло 3 минуса. Противоречие.

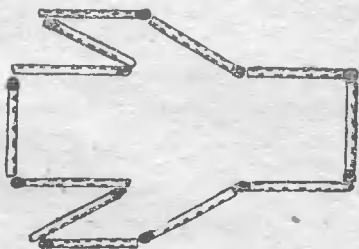


Рис. 29.

Таблицы, у которых на диагонали стоят 1, 2, 3 или 4 минуса, а на остальных местах плюсы, являются минимальными (значит, характеристика может принимать значения 0, 1, 2, 3 и 4). Чтобы это доказать, полезно заметить, что результат преобразования таблицы T_1 в T_2 зависит не от числа изменений некоторой строки или столбца, а только от четности этого числа. В самом деле, пусть, например, первая строка менялась a раз, а столбцы менялись соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 раза. Тогда знак, стоящий в левом верхнем углу, менялся $a + b_1$ раз, а знак в остальных трех клетках первой строки менялся соответственно $b_2 + a, b_3 + a, b_4 + a$ раз. При a четном можно взять вместо a нуль, а при a нечетном — единицу, и результат будет тем же. Поэтому можно рассматривать только такие преобразования, при которых каждая строка и каждый столбец меняются не более одного раза. Пользуясь этим, уже нетрудно проверить минимальность таблиц, упомянутых выше.

68. Рассмотрим произвольный выпуклый n -угольник, никакие три диагонали которого не пересекаются в одной точке. Пусть N — число частей, на которые n -угольник разбивается всеми своими диагоналями. Найдём N . С этой целью будем проводить диагонали n -угольника последовательно, одну за другой. Каждый раз, когда очередная диагональ встречается на своем пути одну из диагоналей, проведенных ранее, появляется новая точка пересечения диагоналей, и число частей, на которые проведенные отрезки делят n -угольник, увеличивается на единицу. Когда диагональ достигает вершины, то число частей увеличивается еще на единицу. Вначале многоугольник состоял из одной части. Отсюда

следует, что искомое число частей N на единицу превышает сумму числа всех диагоналей и числа всех точек их пересечения.

Найдем сначала число диагоналей выпуклого n -угольника. Пару вершин n -угольника можно выбрать $\frac{n(n-1)}{2}$ способами; n пар определяют стороны, остальные $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ пар определяют диагонали.

Подсчитаем теперь общее число точек пересечения диагоналей. Для этого заметим, что любые 4 вершины n -угольника образуют выпуклый четырехугольник, диагонали которого пересекаются внутри n -угольника. Так как из n вершин можно выбрать 4 вершины $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ способами (проверьте это!), то все диагонали n -угольника дают $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ точек пересечения.

Таким образом, находим искомое число частей

$$N = \frac{n(n-3)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + 1.$$

Замечая, что $\frac{n(n-3)}{2} + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, и преобразовывая, получим окончательно

$$N = \frac{(n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 12)}{24}.$$

В частности, если $n = 20$, то $N = 5016$.

69. Проведите диагонали в квадрате и воспользуйтесь теоремой Пифагора. Искомая сумма равна 1.

$$\begin{aligned} 70. \quad x^8 + x^4 + 1 &= (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = \\ &= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1). \end{aligned}$$

71. Докажем, что есть по крайней мере 97 школьников, каждый из которых знаком с 99 остальными участниками кружка. Пусть не все 100 школьников знакомы между собой. Тогда найдутся двое A и B , которые не знают друг друга. Рассмотрим любую четверку школьников, в которую входят A и B , скажем A, B, X, Y . По условию один из четырех знаком с остальными тремя. Это может быть X или Y , так как A и B незнакомы. Пусть, например, X знаком с A, B и Y . Применяя то же рассуждение к любой группе A, B, X, Z , в которую входят A, B и Z , видим, что либо X знаком с A, B и Z , либо Z знаком с A, B и X , то есть опять-таки X знаком с Z . Следовательно, X знаком со всеми участниками кружка. Итак, в любой четверке, в которую входят A и B , есть школьник, знакомый со всеми участниками кружка. Отсюда следует, что кроме A и B найдется самое большее один школьник, знакомый не со всеми участниками кружка.

72. Пусть такое разбиение возможно; тогда общее число сторон черных треугольников будет на 10 больше общего числа сторон белых. Между тем оба эти числа должны быть кратны трем. Мы пришли к противоречию.

73. Приводим решение для правильных многоугольников с любым четным числом $2n$ сторон. Для каждой вершины многоугольника имеется диаметрально противоположная (рис. 30). Поэтому

$$\begin{aligned} AP_1^2 + AP_2^2 + \dots + AP_{2n}^2 &= \\ &= (AP_1^2 + AP_{n+1}^2) + (AP_2^2 + AP_{n+2}^2) + \dots + (AP_n^2 + AP_{2n}^2) = \\ &= (2R)^2 + \dots + (2R)^2 = 4nR^2. \end{aligned}$$

Для многоугольников с нечетным числом n сторон имеет место аналогичный результат: сумма квадратов хорд, соединяющих точку на описанной окружности с вершинами правильного n -угольника, равна $2nR^2$, однако доказательство этого факта более сложно.

74. Так как произведение восьмизначно, то искомое число не может оканчиваться нулем. Но произведение делится на 1000, так что один из сомножителей должен делиться на 125, а другой — на 8. Числа, которые делятся на 125 и не оканчиваются нулем, должны иметь на конце одну из следующих комбинаций цифр: 125, 375, 625, 875. Рассмотрев каждый случай в отдельности, находим

$$\overline{abcd} = 6125; 6375; 4625; 4875, \quad \overline{dcba} = 5216; 5736; 5264; 5784.$$

Еще четыре ответа можно получить, поменяв числа \overline{abcd} и \overline{dcba} местами.

75. В треугольнике ABC продолжите медиану AM за точку M на отрезок $MD = AM$. Заметив, что $BD = AC$, постройте треугольник ABM (рис. 31).

76. Пусть A — общая точка кругов. Соедините A с центрами кругов и рассмотрите наименьший из образовавшихся углов. Покажите,

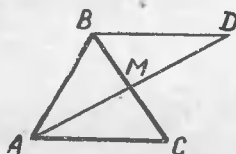


Рис. 31.

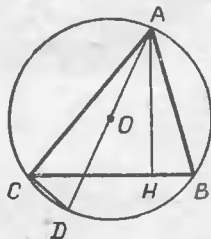


Рис. 32.

что отрезок, соединяющий соответствующие центры O_1 и O_2 , лежит целиком в одном из кругов.

77. Пусть число m_1 , составленное из данных цифр, делится на число m_2 ($m_2 < m_1$). Тогда и $m_1 - m_2$ делится на m_2 . Докажите, что разность двух чисел с одинаковой суммой цифр делится на 9. Так как числа m_2 и 9 взаимно просты (m_2 на 3 не делится), то $m_1 - m_2$ делится на $9m_2$. Но $9m_2$ — число восьмизначное. Противоречие.

78. Опишите вокруг треугольника ABC окружность и заметьте, что $\angle ADC = \angle ABC$ (рис. 32).

79. Рассмотрим в отдельности три случая.

1. $x \leq 0$. Каждый из одночленов, входящих в многочлен, неотрицателен, поэтому $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 \geq 1 > 0$.

2. $0 < x < 1$. В этом случае

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = (1 - x) + x^4(1 - x^5) + x^{12} > 0.$$

3. $x \geq 1$. Тогда

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1 \geq 1 > 0.$$

80. Преобразуем правую часть данного равенства

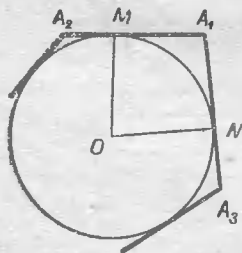
$$\begin{aligned} \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{200} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} - 1 - \\ &- \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{100} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{2} + \\ &+ \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{200}. \end{aligned}$$

81. 10 способов.

82. Рассмотрим произвольную продольную или поперечную прямую. Она делит доску на две области, в каждой из которых имеется четное число клеток. Из них четное число (может быть нуль) покрыто костяшками, не пересекающими границу областей. Следовательно, границу может пересекать только четное число костяшек: 0, 2, 4 или больше. Всего таких прямых имеется 102, и для того, чтобы каждую из них пересечь костяшками, потребовалось бы не менее 204 костяшек. Но в нашем распоряжении только 200 костяшек.

83. Поверните треугольник ACD вокруг точки C на 60° так, чтобы точка D совпала с точкой E .

84. Вызовем произвольного ученика A_1 . Пусть он решил задачи a_1 и a_2 . Попросим его рассказать, скажем, задачу a_2 . Найдется единственный ученик A_2 , решивший вместе с A_1 задачу a_2 . Пусть он расскажет другую решенную им задачу a_3 . Продолжим этот процесс. Покажите, что рано или поздно будет спрошен ученик, решивший вместе с A_1 задачу a_1 . Что делать дальше, если остались еще не спрошенные ученики?



85. Пусть A_1 — некоторая вершина десятиугольника, а M и N — точки касания его сторон A_1A_3 и A_1A_2 с вписанной окружностью.

Покажите, что

Рис. 33.

$$\angle MON = 180^\circ - \angle A_1$$

(рис. 33). Пользуясь этим, постройте десятиугольник, подобный данному.

86. Число $\frac{n(n+1)}{2}$ оканчивается на ту же цифру, что и $\frac{(n+20)(n+24)}{2}$, так как их разность делится на 10.

87. Представим каждое из чисел, записанных на полях шахматной доски, в виде суммы двух других чисел так, как это показано на рис. 34. Если 8 ладей не бьют друг друга, то на каждой горизонтали и

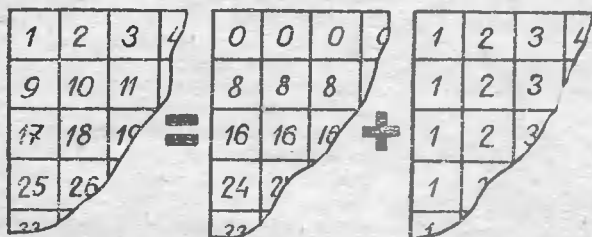


Рис. 34.

вертикали стоит по одной ладье. Поэтому сумма чисел по полям, занятым фигурами, всегда будет

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 8) + (0 + 8 + 16 + \dots + 56) = 260.$$

$$\begin{aligned} 88. (n+1)(n+2)\dots(2n-1)2n &= \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n} = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) 2^n. \end{aligned}$$

89. Опустим из точки B перпендикуляр BD на AC (рис. 35). Треугольники CBD , CEH и AHE подобны. Точки E и O — середины соответственных сторон, поэтому $\triangle BEC$ подобен $\triangle AHO$. А так как AH перпендикулярна к BC , то и AO перпендикулярна к BE .

90. Ничего не изменится, если мы будем считать, что рассматриваемая окружность имеет единичную длину. Докажем сначала, что через точку A всегда можно провести хорду, отсекающую дугу рациональной длины p/q . С этой целью (рис. 36) проведем диаметр MV , перпендикуляр-

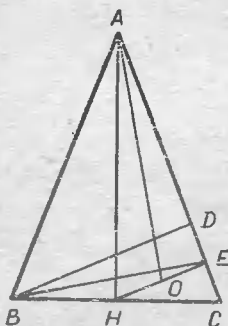


Рис. 35.

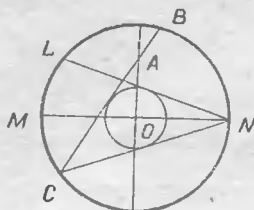


Рис. 36.

ный к отрезку OA . Затем отложим от точки N дугу NL рациональной длины p/q , столь близкой к $1/2$, чтобы хорда LN проходила между точками A и O . Проведем окружность с центром O , касательную к LN , и

построим хорду CB , проходящую через точку A и касающуюся этой окружности. Дуга CB имеет ту же рациональную длину p/q , что и дуга NL . Если мы выпустим из точки A луч по хорде BC , то после каждого отражения он будет проходить дугу, равную p/q , и после q отражений (возможно, и раньше) вернется в исходную точку (проверьте это и постройте соответствующий чертёж).

Таким образом, задача всегда разрешима и имеет бесконечно много разных решений.

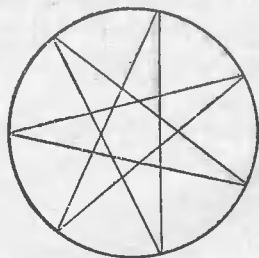


Рис. 37.

91. Заметим сначала, что каждое звено ломаной может пересекать не более чем 200 звеньев (заведомо исключаются оно само и два соседних звена). Поэтому общее число точек самопересечения не может превосходить $\frac{203 \cdot 200}{2} = 20\,300$. Ровно 20 300 точек пересечения имеется, например, у правильного звездчатого 203-угольника. Как его построить, станет понятно, если взглянуть на рис. 37, где изображен правильный звездчатый

7-угольник. Убедитесь сами, что никакие три звена правильного звездчатого 203-угольника не пересекаются в одной точке.

92. Обозначим окружности через C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 . Пусть окружности C_1, C_2, C_3, C_4 пересекаются в точке A , окружности C_1, C_2, C_3, C_5 — в точке B , окружности C_1, C_2, C_4, C_5 — в точке C . Если A, B, C — различные точки, то окружности C_1 и C_2 имеют три общие точки и потому совпадают. Но тогда общая точка окружностей C_1, C_3, C_4, C_5 принадлежит и C_2 . Если же, например, точки A и C совпадают, то общей для всех окружностей будет точка A .

93. Покажем, что пешеходы будут ближе всего друг к другу, когда они находятся в точках C и D на одинаковом расстоянии от точки O (рис. 38). Действительно, пусть они находятся в других точках: E и F . Построив отрезок DE' , симметричный DE относительно CD , видим, что $EF > FE' = CD$ (так как EF — гипотенуза прямоугольного треугольника $FE'E$). Если $\angle AOB = 90^\circ$, $AO = a$, $BO = b$ и $a > b$, то минималь-

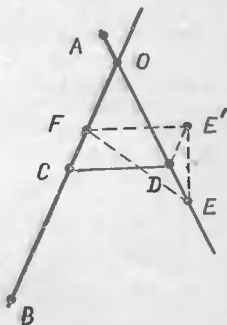


Рис. 38.

ное расстояние между пешеходами достигается через время $\frac{a+b}{2v}$ после начала движения и равно $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$.

94. Допустим, что диагонали AD, BE и CF не пересекаются в одной точке. Пусть K, L и M — точки попарного пересечения, соответственно диагоналей AD и BE , AD и FC , BE и FC . Для определенности рассмотрим тот случай, когда диагональ FC пересекает треугольник KDE (именно этот случай изображен на рис. 39). Четырехугольники $ABEF$ и $ABCD$ имеют, по условию, площадь $S/2$, где S — площадь исходного шестиугольника $ABCDEF$. Отсюда легко усмотреть, что равны площади

треугольников ABK и KDE . Точно так же равны площади у треугольников CLD и ALF и у треугольников FME и BMC .

Как известно, площади треугольников, имеющих по одному равному углу, относятся как произведения сторон, образующих эти углы. Поэтому

$$\begin{aligned} AK \cdot BK &= DK \cdot EK, \\ CL \cdot DL &= AL \cdot FL, \\ FM \cdot EM &= BM \cdot CM. \end{aligned}$$

Перемножив эти равенства, получим (после перегруппировки сомножителей)

$$\begin{aligned} AK \cdot BK \cdot CL \cdot DL \cdot FM \cdot EM &= \\ &= AL \cdot BM \cdot CM \cdot DK \cdot FL \cdot EK. \end{aligned}$$

Но каждый из сомножителей в правой части больше соответствующего сомножителя слева. Противоречие.

95. Нетрудно видеть, что любые две точки на рис. 7 можно соединить ломаной, содержащей не более 5 звеньев. Рассмотрев такую ломаную, соединяющую точки, в которых стоят 1 и 18, докажете, что на концах одного из ее звеньев стоят числа, разность которых больше трех.

96. Необходимость. Пусть числа $2^m - 1$ и $2^n - 1$ взаимно просты. Докажем, что m и n также взаимно просты. Допустим противное, то есть что m и n имеют общий делитель $d \neq 1$, так что $m = dm_1$, $n = dn_1$. Тогда данные числа можно записать в виде

$$\begin{aligned} 2^{dm_1} - 1 &= (2^d)^{m_1} - 1, \\ 2^{dn_1} - 1 &= (2^d)^{n_1} - 1, \end{aligned}$$

и, значит, оба они делятся на $2^d - 1$. Противоречие.

Достаточность устанавливается сложнее. Нам понадобится следующая

Лемма. Если m и n взаимно просты, то найдутся натуральные u и v такие, что

$$mu = nv + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим остатки от деления чисел

$$m, 2m, 3m, \dots, (n-1)m$$

на n . Произведение сомножителей, взаимно простых с n , само взаимно просто с n , поэтому все остатки отличны от 0. Покажем, что среди них нет одинаковых. Действительно, если бы числа pm и qm , где $p < q$, давали при делении на n одинаковые остатки, то их разность $(q-p)m$ делилась бы на n , что невозможно, ибо $q-p < n$. Итак, среди $n-1$ остатков будут представлены все числа от 1 до $n-1$, что и доказывает лемму.

Вернемся к нашей задаче. Доказательство достаточности проведем методом «от противного». Пусть числа m и n взаимно просты, но $2^m - 1$ и $2^n - 1$ имеют общий делитель $D \neq 1$. Согласно лемме, найдутся u и v такие, что $mu = nv + 1$. Следовательно,

$$2^{mu} - 1 = 2^{nv+1} - 1 = 2 \cdot 2^{nv} - 1 = 2(2^{nv} - 1) + 1.$$

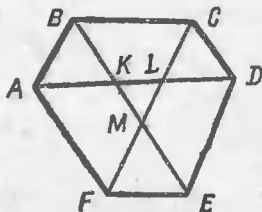


Рис. 39.

Число $2^{mu} - 1 = (2^n)^u - 1$ делится на $2^u - 1$ и, значит, делится на D . Точно так же и число $2^{nv} - 1$ делится на D . Итак, в равенстве $2^{mu} - 1 = 2(2^{nv} - 1) + 1$ левая часть делится на D , а правая — нет. Противоречие.

97. Допустим, что X и Y — искомые точки (рис. 40). Построим ромб $X Y B D$ и соединим A с D . Легко видеть, что треугольник $A X D$ — равнобедренный с углом при вершине $X = C$.

Проведенный анализ подсказывает следующий план построения. Возьмем на AC произвольную точку X_1 и построим равнобедренный треугольник $A X_1 D_1$ с углом при вершине $X_1 = C$. Затем на AB найдем точку B_1 такую, что $D_1 B_1 = X_1 D_1$.

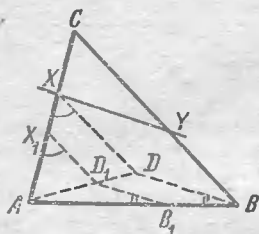


Рис. 40.

Проведем $BD \parallel B_1 D_1$ до пересечения с AD_1 в точке D , затем $DX \parallel D_1 X_1$ до пересечения с AC в точке X и, наконец, $XY \parallel BD$ до пересечения с CB в точке Y . Рассмотрев подобие треугольников $AD_1 B_1$ и ADB , а также $AD_1 X_1$ и ADX , докажете, что $AX = XY = YB$. Проведите полное исследование.

98. Заметьте, что $a \leq 1, b \leq 1, c \leq 1$. Докажите, что при любом x выполняется неравенство $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. Выведите отсюда, что

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) \leq 1/64.$$

Но, перемножив данные неравенства, получим

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) > 1/64.$$

Противоречие.

99. Пусть, для определенности, $|a| \geq |b|$. Тогда $|a+b| \leq 2|a|$ и, значит,

$$(a+b)^{100} \leq 2^{100} a^{100} < 2^{100} (a^{100} + b^{100}).$$

100. При вращении стержня BC точка C описывает окружность. Воспользовавшись тем, что точку E можно получить, повернув AC на 60° вокруг точки A , докажете, что точка E также описывает окружность. Найдите на этой окружности точку, наиболее удаленную от B (рис. 41).

О т в е т. Максимальное значение BE равно $a+b$. В этом случае $\angle ABC = 120^\circ$.

101. Предварительно докажете, что если некоторый прямоугольник помещен в полукруг, то можно указать прямоугольник с таким же или с большим периметром, нижнее основание которого лежит на диаметре.

Пусть теперь в прямоугольнике $ABCD$ сторона AD вчетверо больше стороны AB . Через точки B и C проведите касательные к полукругу и докажете, что все прямоугольники, вписанные в $\triangle EFG$, имеют одинаковый периметр (рис. 42) (напримёр, прямоугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ на рис. 42).

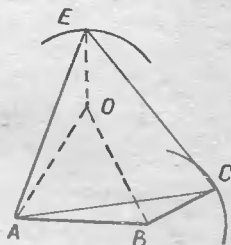


Рис. 41.

102. Пусть $AB > AC$. Треугольник $AB'C'$, подобный ABC и такой, что $AC < AB' < AB$, приложим к стороне AC' треугольника ABC , как показано на рис. 43. Проведем через точку E пересечения BC и $B'C'$ прямую DE , параллельную AC . Треугольники $AB'C'$ и DBE удовлетворяют условию.

103. Проведите через точку P отрезок $A'B'$, равный и параллельный AB (рис. 44). Приложите параллелограмм $AA'B'B$ к стороне CD так, чтобы точка A совпала с C , а точка B с D .

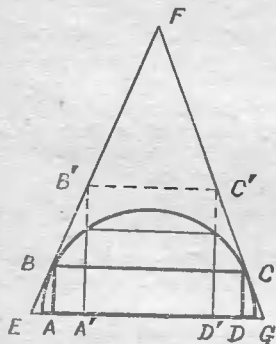


Рис. 42.

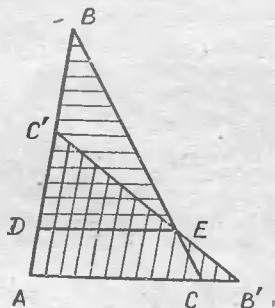


Рис. 43.

104. Предположим, что при каждом положении меньше чем 100 секторов внутреннего круга расположены против одинаково окрашенных секторов внешнего круга. Тогда общее число случаев, когда цвета секторов совпадают, окажется меньше чем $100 \cdot 200$. С другой стороны, если

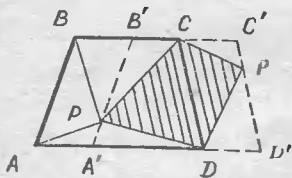


Рис. 44.

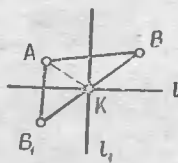


Рис. 45.

совершить полный оборот внешнего круга, то произвольный сектор внутреннего круга будет сто раз покрыт секторами, имеющими тот же цвет, и сто раз секторами, имеющими другой цвет. Следовательно, общее число случаев, когда секторы внешнего и внутреннего круга, расположенные друг против друга, одинаково окрашены, равно $100 \cdot 200$. Противоречие.

105. Пусть B_1 — точка, симметричная точке B относительно K , l и l_1 — две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через точку K (рис. 45). Докажите, что сумма расстояний от точек A и B до прямой l равна проекции на l_1 того из отрезков AB и AB_1 , который пересекается с l . Теперь легко установить, что сумма расстояний от A и B до l пан-

большая, когда прямая l проходит перпендикулярно наибольшему из отрезков AB и AB_1 , и наименьшая, когда прямая l совпадает с одной из сторон AK или BK треугольника ABK , а именно с той из двух сторон, на которую опущена меньшая высота.

106. Можно считать, что $a \geq b \geq c$. Если $c = 1$, то, как легко доказать, либо $a = b = 1$, либо $a = 2, b = 1$, либо $a = 3, b = 2$.

Пусть теперь $c \geq 2$. Докажем, что в этом случае все числа разные, т. е. $a > b > c$. По условию

$$ab + 1 = Kc, \quad ac + 1 = Lb, \quad bc + 1 = Ma$$

(K, L и M — целые). Перемножив эти равенства, можно заметить, что при некотором целом N

$$ab + bc + ac + 1 = Nabc,$$

т. е., во всяком случае, $ab + bc + ac + 1 \geq abc$.

Но нетрудно проверить, что при наших предположениях относительно a, b и c

$$abc \leq ab + bc + ac + 1 < 3ab.$$

Отсюда $c < 3$, т. е. $c = 2$. Теперь уже легко довести рассуждение до конца и получить $a = 7, b = 3$.

107. Каждое из 25 чисел записано в таблице 25 раз, причем вне главной диагонали оно встречается четное число раз, следовательно,

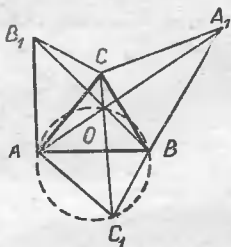


Рис. 46.

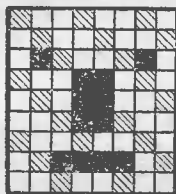


Рис. 47.

на главной диагонали каждое из чисел встречается нечетное число раз. Это возможно лишь тогда, когда каждое число записано на главной диагонали один раз.

108. Постройте на сторонах треугольника ABC подобные между собой треугольники ABC_1, BSA_1, CAB_1 с углами $180^\circ - \angle H, 180^\circ - \angle K, 180^\circ - \angle M$ (рис. 46). Покажите, что точка O лежит на пересечении прямых CC_1 и BB_1 . С этой целью проверьте, что точка O лежит на окружностях, описанных вокруг треугольников ABC_1 и AB_1C .

109. Поверните треугольник ABN вокруг точки B на 90° так, чтобы BN совпала с BK . Пусть A' и E' — новые положения точек A и E . Докажите, что фигура $CBA'K$ — треугольник, а BE' — его средняя линия. Выведите отсюда, что прямая BE перпендикулярна к CK .

110. Заштрихуем некоторые клетки, как показано на рис. 47. Эти клетки выбраны так, что всякий трехклеточный прямоугольник содержит одну и только одну заштрихованную клетку. Если бы удалось разбить нашу фигуру из 60 клеток на трехклеточные прямоугольники, то получилось бы 20 прямоугольников. Но заштрихованных клеток не 20, а 21.

111. Всегда. Действительно, найдутся две точки A и B , расстояние между которыми наименьшее. Наименьшая из окружностей, проходя-

щих через точки A, B и каждую из остальных $(n - 2)$ точек, не содержит внутри ни одной из заданных n точек (докажите).

112. Назовем поля, расположенные на верхней и нижней горизонталях, крайними, а остальные средними. На крайнее поле можно попасть конем только со среднего. Если конь обошел все поля с соблюдением условий задачи, то $2n$ ходов были сделаны со средних полей на крайние. Ясно, что оставшиеся $2n$ ходов должны быть сделаны с крайних полей на средние. Но с каждым ходом изменяется также цвет поля, на котором стоит конь. Получается, что все поля крайних горизонталей окрашены в один цвет, а средних — в другой. Противоречие.

113. Применим индукцию. Для $n = 4$ утверждение задачи справедливо. Пусть оно справедливо для $n = k$. Рассмотрим систему из $k + 1$ точек, удовлетворяющую условию задачи. Выберем любые k точек. Они являются вершинами выпуклого k -угольника, по предположению индукции. Докажите, что $(k + 1)$ -я точка не может лежать внутри этого k -угольника. Для этого разбейте k -угольник диагоналями, выходящими из одной вершины, на треугольники. Продолжим стороны k -угольника, как показано на рис. 48. Для простоты на рисунке показан случай $k = 5$. Покажите, что $(k + 1)$ -я точка не может лежать ни в одной из заштрихованных областей. Если же она лежит в любой из незаштрихованных областей, то все точки являются вершинами выпуклого $(k + 1)$ -угольника.

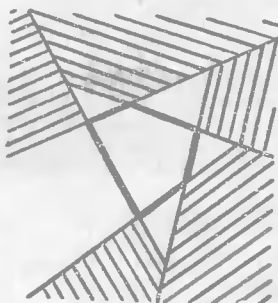


Рис. 48.

114. Докажите, что куб любого натурального числа может быть записан в виде $9k, 9k + 1$ или $9k - 1$, где k — натуральное число. Выведите отсюда, что числа вида $9k + 4$ и $9k + 5$ не представимы в виде суммы кубов трех натуральных чисел.

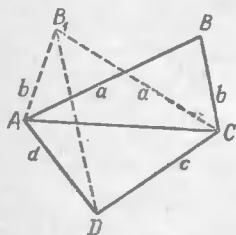


Рис. 49.

116. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник со сторонами a, b, c, d (рис. 49). Построим на диагонали AC треугольник AB_1C со сторонами $AB_1 = b, CB_1 = a$. Площади четырехугольников $ABCD$ и AB_1CD , очевидно, равны. Но площадь AB_1CD складывается из площадей треугольников DAB_1 и DCB_1 , которые не превосходят соответственно $bd/2$ и $ac/2$ (так как, скажем, $S_{DAB_1} = \frac{1}{2}bd \sin \angle B_1AD$). Задача решена.

115. Пусть $N = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$. Положим

$$X = a_1 a_2 \dots a_{n-1}, \text{ тогда}$$

$$N = 10X + a_n \text{ и } N_1 = X + 2a_n.$$

Число N_1 можно переписать в виде

$$N_1 = 2(10X + a_n) - 19X.$$

Теперь утверждение задачи очевидно.

Многokrатно применяя описанный в задаче прием, придем к числу, не превышающему 19. Мы получим, таким образом, признак делимости на 19.

117. Воспользуйтесь признаком делимости на 9.

118.а. Допустим, что такая строка из 50 чисел существует. Из условия задачи следует, что сумма любых четырех рядом стоящих чисел отрицательна. Группу из 28 чисел, стоящих подряд, можно разбить на 7 «четверок» — значит, их сумма отрицательна, но можно разбить и на 4 «семерки» — значит, эта сумма положительна. Противоречие.

б. Условию удовлетворяет, например, строка, в которой четыре раза подряд выписана последовательность

$$4, 4, 4, 4, 4, 4, -5, -5, -5, -5, -5,$$

а на последних шести местах снова: 4, 4, 4, 4, 4, 4.

119. Пусть $10a + b$ — искомое двузначное число (a и b — его цифры, $a \neq 0$). Требуется решить уравнение

$$(10a + b)^2 = (a + b)^3.$$

Обе части этого равенства определяют некоторое число N , являющееся одновременно точным квадратом и точным кубом. Предположим, что некоторое простое число p входит в степени k в разложение N на простые сомножители. Тогда k должно делиться одновременно на 2 и на 3, следовательно, должно делиться на 6. Поэтому $N = n^6$, где n — целое число.

Отсюда вытекает, что искомое двузначное число $10a + b$ должно быть точным кубом, и поэтому может принимать лишь значения 27 и 64. Непосредственной проверкой убеждаемся, что первое из этих чисел удовлетворяет условию, а второе — нет.

Ответ: 27.

120. Если имеется хотя бы один незастеленный участок коридора, то непременно найдется хотя бы один участок, покрытый по меньшей мере 11 слоями дорожек (иначе общая длина дорожек была бы меньше 1000 м). Эта группа из 11 дорожек и остальные 9 дорожек могут оставить свободными самое большее 11 участков коридора.

В точности 11 незастеленных участков можно получить, если, скажем, через одинаковые интервалы друг от друга и от концов коридора разложить 9 дорожек по 0,5 м каждая и группу из 11 дорожек длиной по 90,5 м.

121. Пусть при делении простого числа p на 30 в частном получилось a и в остатке b , т. е. $p = 30a + b$. Допустим теперь, что b — составное. Так как любое составное число, меньшее 30, имеет с числом 30 общий множитель (проверьте это!), то и $p = 30a + b$ делится на этот множитель. Но p — простое число или единица. Противоречие.

122. Пусть A и C — вершины тупых углов в четырехугольнике $ABCD$. Докажите сначала, что точки A и C лежат внутри окружности, построенной на диагонали BD как на диаметре.

123. Допустим, в противоречие с доказываемым, что существует простое число p , представимое в виде суммы двух квадратов двумя различными способами:

$$p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$

где $a > b$, $c > d$, $a \neq c$. Будем считать, что $a > c$. Число $p^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$ можно записать в виде

$$p^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

или в виде

$$p^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2.$$

Так как

$$(ac + bd)(ad + bc) = (a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab = p(ab + cd),$$

то $ac + bd$ или $ad + bc$ делится на p . Если $ac + bd$ делится на p , то из первого выражения для p^2 следует, что $ad - bc = 0$, $ad = bc$ и $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Так как $a > c$, то из пропорции следует, что $b > d$, значит, $a^2 + b^2 > c^2 + d^2$. Противоречие.

Если же $ad + bc$ делится на p , то из второго выражения для p точно так же получим, что $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$, откуда $d > c$. Мы же предположили, что $c > d$. Противоречие.

$$124. (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \dots \\ \dots + (k-1)(a_{k-1} - a_k) + ka_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

125. Наименьшим числом, удовлетворяющим условиям задачи, является $2^{15}3^{10}5^6$.

126. Заметим сначала, что $2? = 2$. Докажем, что если $n > 2$, то $n? > n$. Действительно, рассмотрим число

$$n? - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \dots p - 1,$$

где p — наибольшее простое число, не превосходящее n . Это число не делится на простые числа, меньшие или равные p , значит, все его простые делители больше p , а следовательно, больше n .

127. Докажите, что прямая, проходящая через середину диагонали BD параллельно AC (рис. 50), является геометрическим местом точек O , для которых площади четырехугольников $HOGD$ и $EOFB$ равны $\frac{1}{4}$ полной площади.

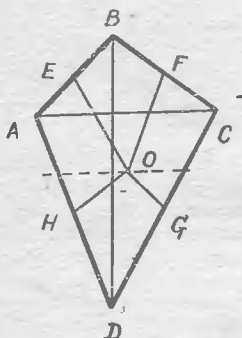


Рис. 50.

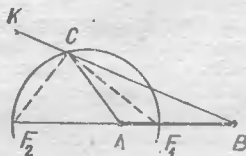


Рис. 51.

128. Заметим, что точку M можно получить, повернув на 60° вокруг P отрезок PK . Искомым геометрическим местом является квадрат, равный квадрату Q и повернутый относительно точки P на 60° .

129. Докажем предварительно следующую лемму:

Лемма. Геометрическое место точек C , отношение расстояний от которых до двух заданных точек A и B равно постоянной k , есть окружность (она называется окружностью Аполлония). Диаметр этой окружности служит отрезок F_1F_2 , где F_1 и F_2 — точки прямой AB такие, что $\frac{AF_1}{F_1B} = \frac{F_2A}{F_2B} = k$ (рис. 51).

Докажите это утверждение самостоятельно, используя тот факт, что CF_1 и CF_2 — биссектрисы смежных углов ACB и ACK , или

прочтите доказательство в книге Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые», «Наука», 1970.

Используя эту лемму, нетрудно решить нашу задачу. В самом деле, если O — искомая точка (рис. 52), то $\frac{CO}{OB} = \frac{DO}{AO} = \frac{CD}{AB} = k$. Поэтому искомая точка O лежит на пересечении окружностей Аполлония, построенных для пар точек D, A и C, B по заданному отношению $k = \frac{CD}{AB}$.

Задача имеет четыре решения.

130. Возьмем ту строку, сумма чисел в которой наименьшая, и рассмотрим суммы чисел по всем «крестам», соответствующим клеткам этой строки. Сумма всех этих сумм не меньше na . С другой стороны, обозначив сумму всех чисел таблицы через N , а сумму чисел этой строки через m , получим $N + (n-1)m \geq na$, но по предположению $m \leq N/n$, поэтому

$$N \left(1 + \frac{n-1}{n} \right) \geq na$$

или

$$N \geq a \frac{n^2}{2n-1}.$$

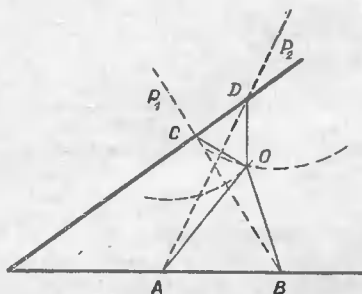


Рис. 52.

Итак, сумма чисел в таблице не меньше $a \frac{n^2}{2n-1}$. Остается только проверить, что можно расставить числа в таблице так, чтобы эта сумма была равна $a \frac{n^2}{2n-1}$. Сделать это предоставляется читателю.

131. Пусть O — точка пересечения некоторых двух прямых. Допустим, что не все прямые проходят через точку O . Пусть, например, прямая l через O не проходит. Среди точек пересечения прямых, не лежащих на l , выберем ближайшую к l точку, обозначим ее A (рис. 53). По условию через нее проходят по крайней мере три прямые. Пусть эти прямые пересекают l в точках B, C и D , причем C лежит между B и D . Через точку C , кроме l и AC , должна проходить еще одна прямая m . Эта прямая пересечет еще одну сторону треугольника ABD в точке E , которая ближе к l , чем A . Но мы предположили, что точка A — ближайшая к l точка пересечения. Противоречие.

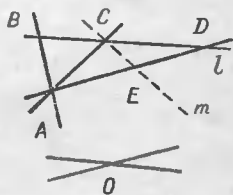


Рис. 53.

132. Докажите, что площадь всей проекции равна удвоенной площади проекции $\triangle ABC$ (рис. 54), так что для получения максимальной по площади проекции надо поставить коробок так, чтобы плоскость ABC была горизонтальной.

В случае пакестика должна быть горизонтальной плоскость, параллельная двум скрещивающимся ребрам (рис. 55). Так будет, если пакестик установить на одно из ребер, расположив противоположное ребро горизонтально.

Отметим, что, изображая на плоском рисунке коробок или пакетик, мы фактически изображаем их проекции.

133. Допустим, что на гранях куба написаны числа $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ (рис. 56). Прделаем операцию, описанную в условии задачи, и полученные при этом числа напишем на гранях второго кубика. Со вторым

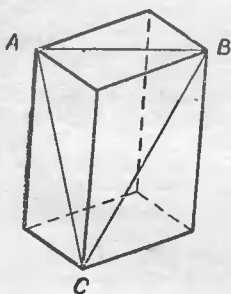


Рис. 54.

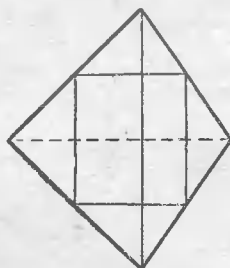


Рис. 55.

кубиком прделаем то же самое и т. д. В результате получим 26 кубиков таких, что числа, написанные, скажем, на 10-м кубике, получаются из чисел, написанных на 9-м, с помощью процедуры, описанной в условии задачи. Обозначим через M_i ($i = 1, 2, \dots, 26$) наибольшее из чисел, записанных на гранях i -го кубика. Покажите сами, что

$$M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq \dots \geq M_{26}.$$

Но из условия задачи вытекает, что $M_{26} = M_1$, так что

$$M_1 = M_2 = M_3 = \dots = M_{26}.$$

Рассмотрим третий кубик. На одной из его граней должно стоять число, равное M_1 . Допустим, что это верхняя грань. Повторяя рассуждения, приведенные в указании к задаче 48, легко показать, что на четырех боковых гранях второго кубика должны стоять числа M_1 . В точности так же можно заключить отсюда, что на всех гранях первого кубика стоит число M_1 . Но по предположению не все числа, написанные на гранях первого кубика, равны. Полученное противоречие показывает, что в вычислении была допущена ошибка.

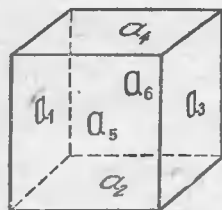


Рис. 56.

134. Пусть вершинам куба поставлены в соответствие некоторые числа. Числа, полученные применением операции, описанной в условии задачи, соотнесем вершинам второго куба. Повторим эту процедуру, введя третий куб, и т. д. Обозначим через m_1, m_2, \dots, m_{11} соответственно наименьшие из чисел, соотнесенных вершинам первого, второго, ..., одиннадцатого кубов. Наибольшие числа, отвечающие каждому из кубов, обозначим через M_1, M_2, \dots, M_{11} . Повторяя рассуждения предыдущей задачи, установите, что $M_1 = M_2 = \dots = M_{11}, m_1 = m_2 = \dots = m_{11}$.

Докажите, наконец, опираясь на предложение, приведенное в указании к задаче 48, что $M_1 = 1$, $m_1 = 0$ и что числа поставлены в соответствие вершинам куба так, как это показано на рис. 57.

135. Пусть продолжения боковых сторон AB и CD трапеции пересекаются в точке E . Искомая точка — та из вершин верхнего основания BC , которая ближе к точке E . При доказательстве полезен такой факт: геометрическое место точек внутри угла, сумма расстояний от которых до сторон угла постоянна, есть отрезок, перпендикулярный биссектрисе угла. В случае равнобедренной трапеции ответ неоднозначен: годится любая точка верхнего основания.

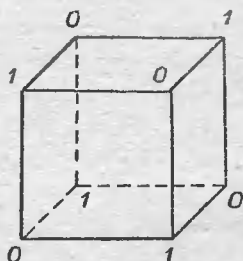


Рис. 57.

136. Задача может быть решена простым перебором всех возможных вариантов. Следующие замечания существенно уменьшат объем работы.

а) Наибольшая из дробей $1/k$, $1/l$, $1/m$ может быть равна либо $1/3$, либо $1/4$, либо $1/5$.

б) Дробь $1/l$ дает наилучшее приближение с недостатком для дроби $1/n$, если $l = n + 1$.

Ответ. Наилучшее приближение $1/2$ с недостатком:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43}.$$

Вторая часть задачи решается аналогично.

Ответ. Наилучшее приближение 1 с недостатком

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43}.$$

137. Воспользуйтесь тем, что после отражения от прямой луч движется так, что его зеркальное изображение лежит на продолжении пути луча до отражения.

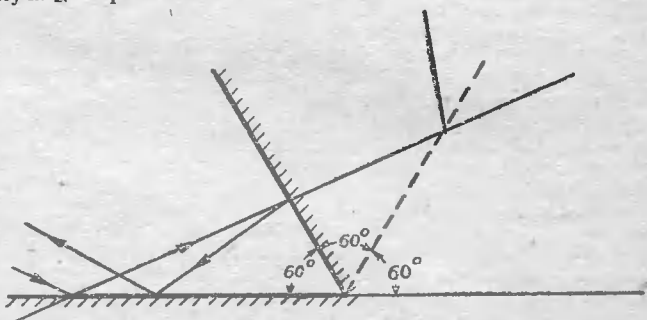


Рис. 58.

Решение для случая угла 60° показано на рис. 58. От сторон угла в 1° луч может отразиться 180 раз.

138. Воспользуйтесь указанием к предыдущей задаче. Докажите, что если a , b , и c — числа отражений луча от трех сторон треугольника,

то справедливо неравенство

$$c - 1 \leq a + b \leq 3c + 3.$$

Числа x и y могут принимать любые значения при условии, что тройка чисел x, y и 4 удовлетворяет данному неравенству. (Проверьте это!)

139. Покажите сначала, что для возвращения в исходную точку «лев» должен сделать одинаковое число ходов вправо, вниз и влево, вверх, т. е. всего $3l$ ходов. Но на доске имеется 100 клеток, поэтому обойти всю доску, побывав в каждой клетке по одному разу, «лев» не может.

140. Допустим, что у белых нет способа выиграть или добиться ничьей. Это означает, что как бы они ни играли, черные всегда (при правильной игре) выигрывают. Но белые, сделав первые два хода конем K $g1-f3$, K $f3-g1$, могут передать очередь хода противнику в исходной позиции.

141. В системе координат, изображенной на рис. 59, а), центр каждого дерева имеет целые координаты x, y , удовлетворяющие неравенству $x^2 + y^2 \leq s^2$. Назовем целую точку *примитивной*, если она видна из

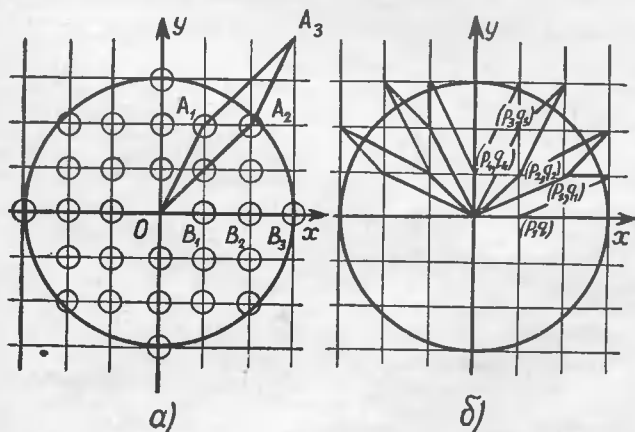


Рис. 59.

начала координат. Нетрудно сообразить, что точка (p, q) примитивна тогда и только тогда, когда p и q взаимно просты. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Если числа p и q взаимно просты, то найдутся целые u_0 и v_0 такие, что $pv_0 - qu_0 = 1$. Общее решение уравнения $pv - qu = 1$ имеет в этом случае вид $u = u_0 + kp$, $v = v_0 + kq$, где k — произвольное целое число.

Первое утверждение сразу следует из леммы на стр. 47, второе легко доказать, если из уравнения вычесть тождество $pv_0 - qu_0 = 1$. Из соотношения $pv - qu = 1$ следует, что u и v взаимно просты. Точка (u, v) называется «левым соседом» точки (p, q) . Каждая примитивная точка (p, q) имеет бесконечно много «левых соседей», причем все они лежат на одной прямой на равных расстояниях.

Построим параллелограмм на точках $(0, 0)$, (p, q) и (u, v) .

Лемма 2. Площадь параллелограмма, построенного на точках $(0, 0)$, (p, q) и (u, v) , равна $p v - q u$.

Доказательство этой леммы предоставляем читателю.

У к а з а н и е. Заметьте, что

$$S_{O A_1 A_2} = S_{O A_1 B_1} + S_{B_1 A_1 A_2 B_2} - S_{O B_2 A_2} - S_{B_2 A_2 A_3 B_3}.$$

Если точки (p, q) и (u, v) — «соседи», то в силу леммы 2 площадь построенного на них параллелограмма равна 1. Пусть диагональ этого параллелограмма имеет длину d . (В дальнейшем, говоря о диагонали, мы всегда будем иметь в виду диагональ, выходящую из начала координат). Тогда (p, q) и (u, v) лежат от нее на одинаковом расстоянии $1/d$.

Обозначим через ρ минимальный радиус деревьев, при котором лес еще не «просвечивает». Мы должны доказать, что $\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \leq \rho \leq \frac{1}{s}$.

А. Точки $(1, 0)$ и $(s - 1, 1)$ являются «соседями». Диагональ построенного на них параллелограмма имеет длину $\sqrt{s^2 + 1}$. Эта диагональ в своем продолжении может быть задержана лишь деревьями радиуса ρ с центрами в точках $(1, 0)$ или $(s - 1, 1)$. Поэтому $\rho \geq \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$.

Б. Пусть (p, q) — некоторая примитивная точка, лежащая в круге $x^2 + y^2 \leq s^2$, а (p_1, q_1) — самый крайний из ее «левых соседей» (это значит, что точка $(p_1 + p, q_1 + q)$ уже лежит вне рассматриваемого круга). Таким же образом пусть (p_2, q_2) — крайний «левый сосед» точки (p_1, q_1) ; (p_3, q_3) — крайний «левый сосед» точки (p_2, q_2) и т. д. После конечного числа шагов мы придем к такой точке (p_n, q_n) , что параллелограммы, построенные на (p, q) и (p_1, q_1) , на (p_1, q_1) и (p_2, q_2) , ..., на (p_{n-1}, q_{n-1}) и (p_n, q_n) , полностью покроют круг радиуса 1 ($x^2 + y^2 \leq 1$). [См. рис. 59, б, где положено $s = 3$, $(p, q) = (1, 0)$]. Диагональ каждого из построенных параллелограммов больше s , а расстояние от вершин, не лежащих на диагонали, до диагонали меньше $1/s$. Поэтому деревья радиуса $1/s$, расположенные в точках (p, q) , (p_1, q_1) , ..., (p_n, q_n) , задерживают любой луч, выходящий из нулевой точки. Значит, $\rho \leq 1/s$.

142. Можно рассматривать лишь карты, в вершинах которых сходятся не более чем три страны *). Можно, далее, не рассматривать карт, содержащих кольцевидные области. Действительно, если у страны a есть кольцевидная часть (рис. 60) и страна b прилегает к внутренней границе кольца, то можно прибавить к b часть c страны a , граничащую с некоторой страной d по внешней границе кольца. Если удастся 12 красками раскрасить новую карту, то удастся раскрасить и старую. Кроме того, можно считать, что каждая страна имеет ровно две части. Действительно, если страна e имеет только одну часть, то задачу можно свести к задаче о раскраске другой карты, которая отличается от нашей только тем, что небольшая область вокруг вершины, где сходятся границы стран f , g и h (рис. 61), принадлежит стране e . Пусть на карте имеется f_4 стран с четырьмя вершинами, f_5 стран с пятью и т. д. (рассматривается общее число вершин на обеих частях страны).

Общее число стран: $f = f_4 + f_5 + f_6 + \dots$. Обозначив число границ через k , а число вершин через l , получаем равенства *) $2k = 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \dots$, $3l = 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \dots$ и, значит, $3l = 2k$. Формула

*) См. Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, изд. 3 Физматгиз, 1962, стр. 99 и 100.

Эйлера *) в нашем случае имеет вид $l + 2f = k + 2$, так как число областей равно $2f$. Умножив обе части этой формулы на 6, получим $6l + 12f = 6k + 12$, т. е. $12f = 3l + 12$, или

$$12(f_4 + f_5 + f_6 + \dots) = (4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \dots) + 12,$$

откуда получаем

$$8f_4 + 7f_5 + \dots + f_{11} = 12 + f_{13} + 2f_{14} + \dots$$

Следовательно, существует страна a , имеющая не более 11 вершин. Около каждой из двух областей, составляющих страну a , есть страна, имеющая данной областью ровно одну границу. Присоединим каждую область

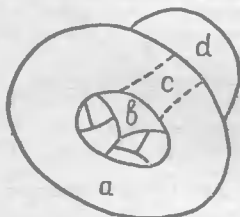


Рис. 60.

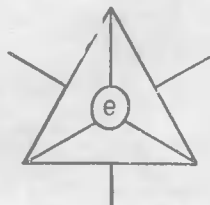
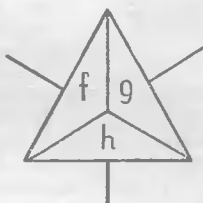


Рис. 61.

страны a к той стране, которая имеет с этой областью одну границу. Мы получим новую карту, на которой на одну страну меньше. Если

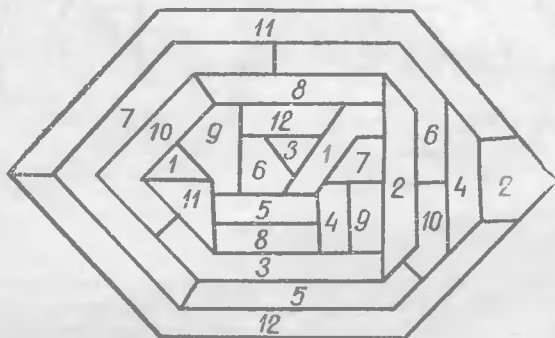


Рис. 62.

удастся раскрасить новую карту 12 красками, то удастся раскрасить и старую. Продолжая эти рассуждения, можно прийти к карте, на которой всего 12 стран. Ее, очевидно, можно раскрасить 12 красками, значит, можно раскрасить и исходную карту. Приведем пример карты, для которой 11 красок мало, так как каждая из 12 стран граничит с 11 остальными (рис. 62).

*) См. Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, изд. 3. Физматгиз, 1962, стр. 97 и 100.

143. Представим себе, что карты планет изображены на двух сферических глобусах, сделанных из резиновой пленки. Деформируя эти сферы, можно превратить их в полусферы так, чтобы взаимное расположение стран не изменилось, но вдоль экватора и на плоскостях оказалось расположенным одно и то же государство (рис. 63).

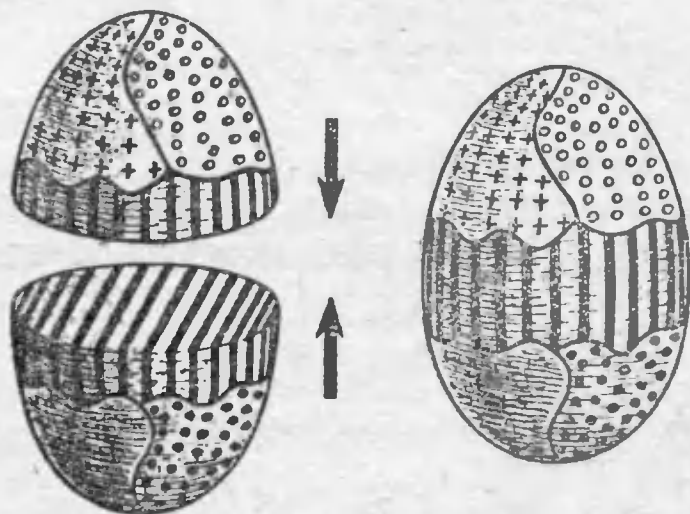


Рис. 63.

Если далее представить, что полусферы соединились основаниями, образовав одну сферу, то мы приходим к условию задачи 142, а там было доказано, что карту подобной сферы можно раскрасить 12 красками. Значит, и исходную карту можно раскрасить 12 красками. Семи красок может не хватить, как видно из рис. 64, где изображены восемь стран, расположенные на двух планетах, причем каждая страна граничит с семью остальными.

144. Пусть в куче n камней. Ясно, что при $n = 1, 2, 3$ начинающий выигрывает. Если $n = 4$, то при любом ходе начинающего его партнер будет иметь дело с 1, 2 или 3 камнями и, значит, выиграет. При $n = 5, 6, 7$ начинающий может поставить партнера в проигрышное положение.

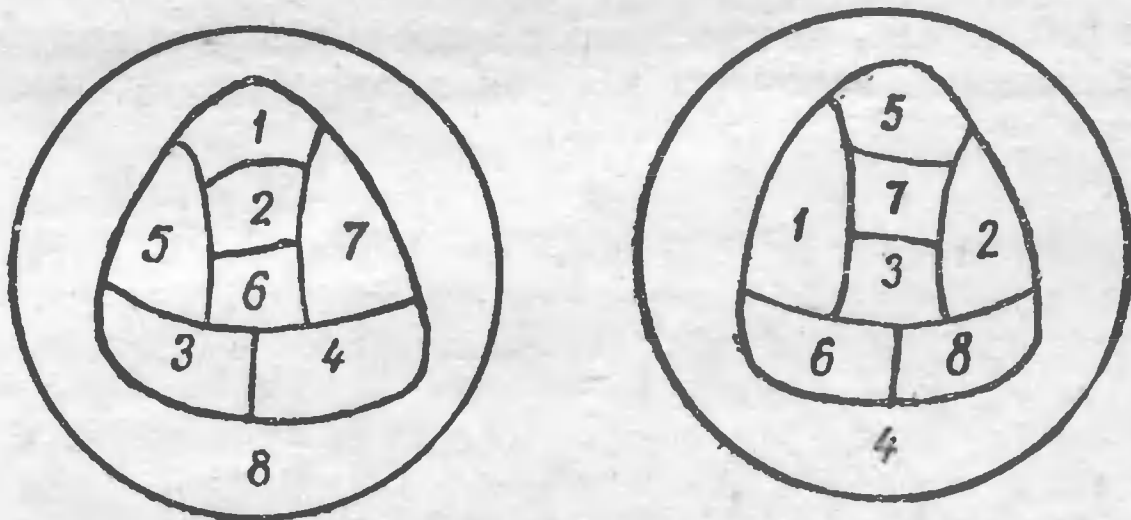


Рис. 64.

оставив ему 4 камня. Значит, значения $n = 5, 6, 7$ являются выигрышными для начинающего. Продолжая эти рассуждения, замечаем, что значение $n = 8$ проигрышное для начинающего, $n = 9, 10, 11$ выигрышные, $n = 12$ проигрышное и т. д.

Вообще для того, чтобы выиграть, достаточно оставлять партнеру при каждом ходе число камней, делящееся на 4. Начинающий может это делать, если начальное число камней не делится на 4.

145а. Если король находится на поле $a1$ (рис. 65), то начинающий проигрывает. Поставим на этом поле знак «—». Отметим плюсами все поля, с которых можно попасть за один ход на поле $a1$. Ясно, что эти поля являются выигрышными (для начинающего). Если все ходы с некоторого поля A ведут на выигрышные поля, то после любого хода начинающего его противник окажется в выигрышном положении. Поэтому мы отмечаем минусами поля $a3$ и $c1$ — они являются проигрышными для начинающего. Далее, мы отмечаем плюсами все поля, с которых можно

попасть за один ход на поля, отмеченные минусами. Продолжая построение, приходим к той расстановке плюсов и минусов, которая показана на рис. 65. Для того чтобы выиграть, достаточно каждый раз передвигать фигуру на поля, отмеченные минусом (ставя тем самым противника в проигрышное положение). Начинаящий может это сделать, если игра начинается с поля, отмеченного плюсом.

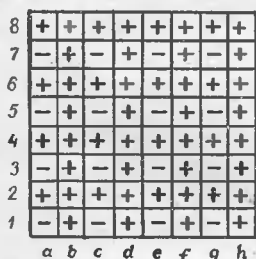


Рис. 65.

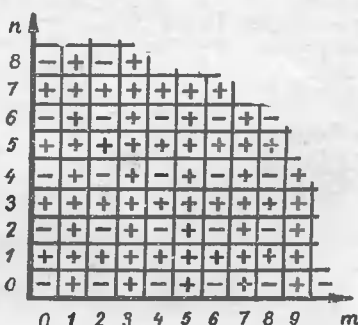


Рис. 66.

6. Каждому ходу в игре с камнями можно соотнести ход на шахматной доске по следующему правилу: если берется камень из первой кучи, то фигура передвигается на одно поле влево, а если из второй кучи, то на одно поле вниз. Естественно при этом передвигать фигуру по диагонали влево-вниз, если берется по одному камню из обеих куч. Заметим, что в результате получилась игра на шахматной доске, рассмотренная в задаче 145а. Положение, при котором в обеих кучах не остается камней, надо соотнести левому нижнему углу поля. Вообще положению «в первой кучке m камней, а во второй n камней» соответствует поле, стоящее на пересечении m -й вертикали и n -й горизонтали (рис. 66*). Расставляя плюсы и минусы, как в предыдущей задаче, мы приходим к следующему выводу. Начинаящий выигрывает, если хотя бы одно из чисел m, n , нечетно. Играть надо, оставляя партнеру каждый раз четное число камней в каждой куче.

146. Ответы даются расстановкой плюсов и минусов, изображенной на рис. 67, а) (для ферзя), б) (для ладьи), в) (для коня). Опишите сами игры с двумя кучами камней, которые соответствуют играм с ладьей и с ферзем.

147. а) Докажите сначала, что AB_1C_1D — трапеция с меньшим основанием B_1C_1 , равным $(a - b)/2$. Отсюда следует, что все четырехугольники AB_nC_nD — трапеции с меньшими основаниями B_nC_n , равными $a - B_{n-1}C_{n-1}$. Выведите отсюда по индукции, что

$$B_nC_n = \frac{a}{3} + \frac{(3b - a)}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

*) Конечно, если хотя бы в одной куче больше семи камней, то придется рассматривать доску с большим чем восемь числом горизонталей или вертикалей.

б) Очевидно, длина $B_n C_n$ стремится к $a/3$.

в) Ясно, что отрезки $B_n C_n$ все равны между собой (и равны BC), когда $a = 3b$.

148. Возьмем обычные магазинные весы со стрелкой и будем класть на них наши гири по одной до тех пор, пока стрелка впервые не покажет вес, больший 500 г. Так как последняя положенная нами гиря весит не больше 500 г, то на весах будет лежать не более 1 кг. По условию оставшиеся гири весят не более 500 г. Следовательно, общий вес не превосходит 1500 г. Три гири по 500 г, очевидно, удовлетворяют условию задачи.

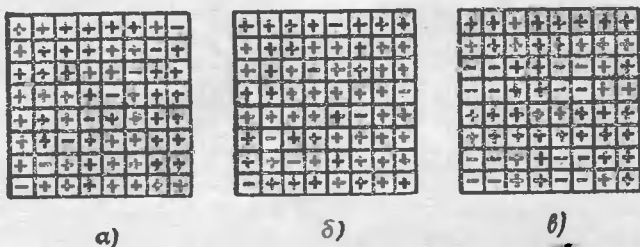


Рис. 67.

149. Введем важное понятие «мировой линии». Пусть на плоскости по какому-то закону перемещается точка. Условимся соотносить движущуюся точку, которая в момент t находится в положении A_t , другую точку (A_t, t) , которая получается, если на вертикальном луче с основанием A_t отложить вверх отрезок длины t . Точки (A_t, t) образуют некоторую пространственную линию, которая и называется «мировой линией» для движения A_t . Нетрудно сообразить, что если в плоскости происходит равномерное прямолинейное движение, то соответствующая «мировая линия» также прямая. Кроме того, две движущиеся точки встречаются тогда и только тогда, когда их «мировые линии» пересекаются. Используя эти два простых соображения, закончите доказательство сами.

150. Обозначим число команд через n . Докажите, что в турнире сыграно $n(n-1)/2$ матчей и число очков, набранных всеми командами, равно $n(n-1)$. Так как призеры набрали 15 очков, то $n(n-1) \geq 15$, откуда $n \geq 5$. Так как команды, занявшие с 3-го по последнее места, набрали не более чем по 3 очка, то $n(n-1) \leq 3(n-2) + 12$, откуда $(n-2)^2 \leq 10$ и $n \leq 5$. Значит, $n = 5$, $n(n-1) = 20$. Командам, занявшим 2 последние места, досталось 5 очков, 3 очка — команде, занявшей 4-е место, и 2 очка — команде, занявшей 5-е место.

151. Двигаясь по стрелкам, указывающим направление движения, пройдем по какой-нибудь улице из начала A в конец B и вернемся из B в A по кольцевой магистрали (рис. 68). Часть города, которую мы объехали (на рисунке она заштрихована), может рассматриваться как новый город, удовлетворяющий всем условиям задачи, но с меньшим числом микрорайонов. Применяя эти рассуждения к меньшему городу, получим еще меньший город, удовлетворяющий условию, и т. д. В конце концов мы придем к городу из одного микрорайона, окруженного кольцом, которое можно объехать по стрелкам.

152. Суммарный вес всех n гирь равен

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для того чтобы можно было разложить гири на 3 кучи одинакового веса, очевидно, необходимо, чтобы или n или $n+1$ делилось на 3. Покажите, что это и достаточно при $n > 3$. Рассуждать можно, скажем, по такому плану.

Значения $n = 5$, $n = 8$ и $n = 9$ исследуются непосредственно. Общий случай сводится к этим частным, если учесть, что 6 последовательных натуральных чисел можно разбить на 3 пары так, что суммы чисел в каждой паре одинаковы.

153. Примем площадь стола за единицу. Выберем какой-нибудь журнал и рассмотрим ту его часть, которая не лежит на других журналах. Для каждого журнала измерим площадь этой части. Мы получим 15 чисел, составляющих в сумме единицу. Ясно, что 7 наименьших из этих чисел составляют в сумме не более $7/15$. Достаточно убрать соответствующие 7 журналов.

154. Проведите через точку P прямую, параллельную одной из сторон угла, до пересечения со второй стороной в точке Q . Рассмотрев получившиеся при этом подобные треугольники, докажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{PQ}.$$

Эти рассуждения пригодны не только для прямого угла и позволяют получить простой вывод формулы для биссектрисы β_C некоторого треугольника через стороны $AC = b$, $BC = a$ и угол C . Именно:

$$\beta_C = \frac{2ab \cdot \cos(C/2)}{a+b}.$$

155. По условию местами могут меняться лишь две фишки, стоящие на четных местах или две фишки, стоящие на нечетных местах. Может ли первая фишка перейти на последнее, сотое место?

156. Занумеруем вершины 17-угольника. Рассмотрим какой-нибудь многоугольник разбиения. Пусть число его сторон n . Проведем прямые, продолжающие его стороны. Пусть n_i — число прямых, проходящих через i -ю вершину. Ясно, что $n_1 + n_2 + \dots + n_{17} = 2n$. Поскольку $n_i \leq 2$, то $2n \leq 34$ и $n \leq 17$.

Может случиться, что $n = 17$. Рассмотрим, например, правильный 17-угольник M , вписанный в окружность с центром O , и проведем в нем все диагонали. Повернем M вокруг O на угол $360^\circ/17$. При этом многоугольник разбиения, содержащий O , совместится со своим прежним положением. Следовательно, это правильный 17-угольник.

157. К первой группе можно отнести числа, в записи которых имеется нечетное число единиц, ко второй группе — все остальные числа.

158. Точка O (рис. 69) — середина диагонали DB — принадлежит искомому геометрическому месту (ибо треугольники DAO и AOB равновелики и треугольники DOC и COB также равновелики). Проведем через точку O отрезок POQ , параллельный AC . Так как треугольники с основанием AC и вершинами на отрезке PQ равновелики, то этот отрезок

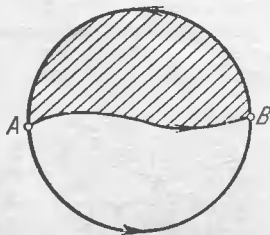


Рис. 63.

входит в искомое геометрическое место. Покажите что никаких других точек это геометрическое место не содержит.

159. Докажите предварительно, что из трех монет одну фальшивую (и две фальшивые) удастся выделить одним взвешиванием, а из четырех монет две фальшивые удастся выделить двумя взвешиваниями. Пользуясь этим, покажите, как посредством трех взвешиваний среди семи данных монет выделить две фальшивые (первое взвешивание — по три монеты на каждой чашке). Наконец, рассуждая, как при решении задачи 2, докажите, что двух взвешиваний может не хватить — одно взвешивание может дать 3 различных результата, два взвешивания — 9 результатов, а среди семи монет можно выбрать две монеты 21 способом.

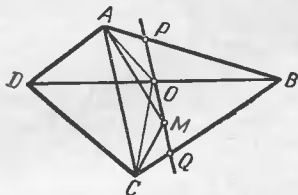


Рис. 69.

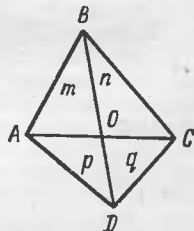


Рис. 70.

160. Обозначим числа, выражающие площади треугольников, через m, n, p и q (рис. 70). У треугольников AOB и COB общая высота, поэтому их площади относятся как основания: $\frac{m}{n} = \frac{AO}{OC}$. Точно так же $\frac{p}{q} = \frac{AO}{OC}$. Значит, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ и $mq = np$, откуда $mnpq = (np)^2$, что и требовалось доказать.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|---|
| ЧЕТ | + | - | + | + | + | + | + | - | + | + | + | + | + | - | + |
| НЕЧЕТ | - | + | + | + | + | - | - | + | + | + | + | - | - | + | + |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | |

Рис. 71.

161. Положения в игре описываются числом спичек, оставшихся в коробке, и четностью числа спичек у игрока, имеющего право хода. Рассмотрим диаграмму (рис. 71), имеющую вид шахматной доски размером $2 \times (2n + 2)$ клеток. Будем изображать положения в игре, ставя фишку на этой доске на ту вертикаль, номер которой равен числу спичек, оставшихся в коробке, и выбирая горизонталь в соответствии с четностью числа спичек у игрока, получившего право хода. Скажем, положение фишки на поле «11, нечет» означает, что в коробке 11 спичек, и число спичек у игрока, получившего право хода, нечетно. Так как общее число спичек нечетно, то у противника в этот момент тоже нечетное число спичек, и после любого хода фишка останется на нижней (нечетной) горизонтали. Легко видеть, что и вообще фишка, стоявшая на вертикали с нечетным номером, после хода останется на прежней горизонтали, если

же она стояла на вертикали с четным номером, то любой ход переведет ее на другую горизонталь. Из условия следует, что игрок, поставивший фишку на нулевую вертикаль, победил, если после его хода фишка оказалась в нижнем углу, в противном случае побеждает его партнер.

а) Расставляя на диаграмме плюсы и минусы по образцу задачи 145, докажите, что проигрышные поля имеют вид « $(6k - 1)$, нечет», « $6k$, нечет» и « $(6k + 1)$, чет», где k — натуральное число, и при правильной игре выигрывает начинающий.

б) Описанным методом можно получить ответ и в более общем случае.

162. Обозначим n -е число ряда Фибоначчи через a_n . Тогда по определению этого ряда

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, \dots, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \dots$$

Дополнительно положим $a_0 = 0$ с тем, чтобы $a_0 + a_1 = a_2$.

Докажем ряд свойств чисел Фибоначчи.

А. Для любых k и l

$$a_{k+l} = a_k a_{l-1} + a_{k+1} a_l. \quad (1)$$

Это тождество проверяется индукцией по k . При $k = 0$ оно тривиально, а при $k = 1$ сводится к основному соотношению $a_{l+1} = a_{l-1} + a_l$. Пусть формула (1) верна для некоторых $k - 1$ и k . Тогда

$$\begin{aligned} a_{k+1+l} &= a_{k+1} + a_{k+l-1} = a_k a_{l-1} + a_{k+1} a_l + a_{k-1} a_{l-1} + a_k a_l = \\ &= a_{l-1} (a_k + a_{k-1}) + a_l (a_{k+1} + a_k) = a_{l-1} a_{k+1} + a_l a_{k+2}. \end{aligned}$$

Б. Для любых n и k число a_{kn} делится на a_k .

Это свойство легко доказывается индукцией по n с использованием формулы (1).

В. Два соседних члена ряда Фибоначчи взаимно просты.

В самом деле, предположим, что какие-то соседние члены a_k, a_{k+1} имеют общий делитель $l \neq 1$. Тогда из формулы $a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$ вытекает, что и a_{k-1} делится на l . Так как a_k и a_{k-1} делятся на l , то и a_{k-2} делится на l . Проводя эти рассуждения далее, получим в конце концов, что числа a_1 и a_2 имеют общий делитель $l \neq 1$, что неверно.

Найдем теперь общий наибольший делитель числа a_{1000} и a_{770} . По свойству А

$$a_{1000} = a_{770} a_{229} + a_{771} a_{230}.$$

Если a_{1000} и a_{770} имеют общий делитель r , то (в силу свойства Б) и a_{230} делится на r . Но

$$a_{770} = a_{690} a_{79} + a_{691} a_{80}.$$

По свойству Б член a_{690} делится на a_{230} и, следовательно, делится также и на r . Поэтому, как и ранее, получаем, что a_{80} делится на r . Из соотношения

$$a_{240} = a_{230} a_9 + a_{231} a_{10}$$

в точности так же выводим, что a_{10} делится на r . Но a_{10} (по свойству Б) общий делитель чисел a_{1000} и a_{770} . Так как a_{10} делится на любой общий делитель r чисел a_{1000} и a_{770} , то a_{10} — наибольший общий делитель чисел a_{1000} и a_{770} .

Аналогично можно показать, что наибольший общий делитель чисел a_n и a_m равен a_s , где s — наибольший общий делитель n и m . При этом надо отпращиваться от цепочки равенств, получающихся при нахождении

наибольшего общего делителя чисел n и m с помощью алгоритма Евклида (о котором уже упоминалось в указании к задаче 51). Более подробно о решении задачи 162 см. в книге: Н. Н. Воробьев, Числа Фибоначчи, изд. 2, «Наука», 1964.

163. Пусть a и b — соответственно первая и последняя цифры искомого числа. Само число тогда можно записать в виде $\overline{a\dots b}$, а обращенное $\overline{b\dots a}$. По условию задачи $\frac{\overline{a\dots b}}{\overline{b\dots a}} = k$, где k — целое число, отличное от единицы. По смыслу задачи $a \neq 0$ и $b \neq 0^*$.

Ясно, что $k < 10$. Выясним, как связаны a и b .

Во-первых, из соотношения $\overline{b\dots a} = \frac{a\dots b}{k}$ видно, что $b = [a/k]$. (Здесь и в дальнейшем $[m/n]$ означает целую часть дроби m/n , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее m/n .)

Во-вторых, последняя цифра произведения ak равна b .

Так как $b \neq 0$, то $a \geq k$ (иначе $[a/k] = 0$). Составим таблицу 1, в каждую клетку которой поместим $[a/k]$ и последнюю цифру произведения a на k . Нас устраивают только такие значения a и k , при которых в одной клетке стоят две одинаковые цифры.

Таблица 1 показывает, что задача может иметь решение только при $a = 8$, $k = 4$, $b = [a/k] = 2$ или при $a = 9$, $k = 9$, $b = 1$. Рассмотрим отдельно каждый случай.

Пусть $a = 8$, $b = 2$, $k = 4$. Обозначим через c и d соответственно вторую и предпоследнюю цифры числа. Тогда

$$\frac{\overline{8c\dots d2}}{\overline{2d\dots c8}} = 4.$$

Нетрудно сообразить, что $d = [c/4]$ и что последняя цифра числа $4c + 3$ равна также d . Придавая c различные значения, составим таблицу 2, в которой в строке I стоит $[c/4]$, а в строке II — последняя цифра числа $4c + 3$.

Таблица дает значения $c = 7$, $d = 1$. Обозначив третью цифру через e , а третью цифру с конца через f , получим далее

$$\frac{\overline{87e\dots f12}}{\overline{21f\dots e78}} = 4.$$

Теперь $f = \left\lceil \frac{30+e}{4} \right\rceil$ и f — последняя цифра числа $4e + 3$. Составим таблицу 3.

Условиям задачи удовлетворяют две комбинации цифр e и f : $e = 1$, $f = 7$, $e = 9$, $f = 9$. Если рассмотреть первую возможность, то совершенно аналогично можно установить, что искомое число должно иметь вид $2178\dots 2178$. Заметим, что $2178 \cdot 4 = 8712$, поэтому число $2178\dots 2178$ тогда и только тогда удовлетворяет поставленным условиям, когда им удовлетворяет число, записанное цифрами, стоящими в середине (правда, на этот раз допустимой является комбинация нулей).

*) Если отказаться от предположения, что $b \neq 0$, то задача допускает очень много решений, например $\overline{acd0dca00}$ и т. п. Описать все решения при этом затруднительно.

Таблица 1

| $a \backslash k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------------|-----|-----|------------|-----|-----|-----|-----|----------|
| 2 | 4 | | | | | | | |
| 3 | 1 6 | 9 | | | | | | |
| 4 | 1 8 | 2 | 6 | | | | | |
| 5 | 2 0 | 1 5 | 1 0 | 5 | | | | |
| 6 | 2 2 | 1 8 | 1 4 | 1 0 | 6 | | | |
| 7 | 3 4 | 2 1 | 1 8 | 1 5 | 1 2 | 9 | | |
| 8 | 3 6 | 2 4 | <u>1 2</u> | 1 0 | 1 8 | 1 6 | 4 | |
| 9 | 4 8 | 2 7 | <u>2 6</u> | 1 5 | 1 4 | 1 3 | 1 2 | <u>1</u> |
| | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Таблица 2

| c | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| II | 3 | 7 | 1 | 5 | 9 | 3 | 7 | 1 | 5 | 9 |

Таблица 3

| e | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| II | 3 | 7 | 1 | 5 | 9 | 3 | 7 | 1 | 5 | 9 |

Рассмотрим вторую возможность: $e = 9$, $f = 9$. В этом случае имеем

$$\frac{879k \dots 1912}{219l \dots k978} = 4.$$

Легко усмотреть, что $l = \left[\frac{30+k}{4} \right]$ и что l совпадает с последней цифрой $4k + 3$. Таким образом, для k и l имеются те же две возможности, что и для e и f (т. е. $k = 1, l = 7$ или $k = 9, l = 9$).

Из сказанного можно заключить что возможны следующие простейшие варианты допустимых чисел:

$$8712, 87912, 879912, \dots, \underbrace{87\ 99 \dots 912}_{s \text{ раз}}, \dots$$

Если число начинается с одной из таких комбинаций, то оно обязано на ней и кончатся, при этом число, записанное оставшимися цифрами, должно быть также допустимым. Скажем, поставленным требованиям удовлетворяет число

$$8791200871287120087912.$$

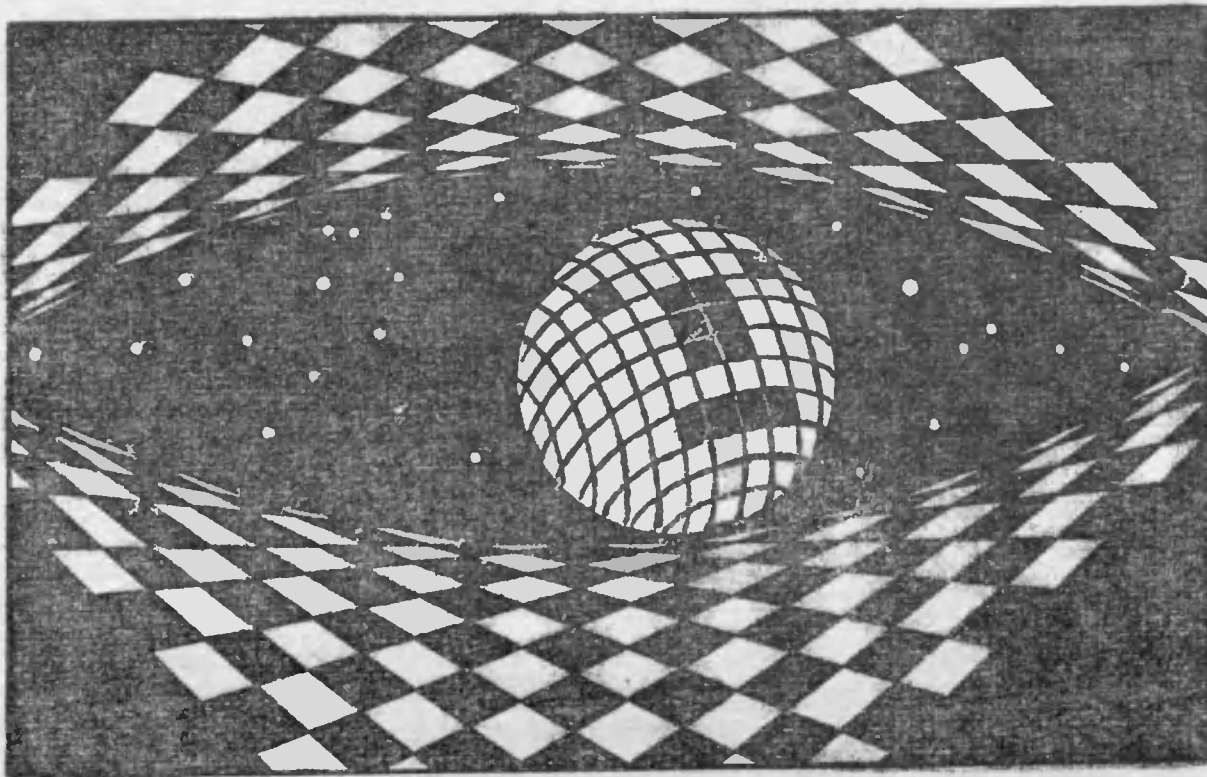
Этим полностью закончен разбор случая $a = 8, b = 2$. Совершенно аналогично исследуется случай $a = 9, b = 1, k = 9$.

В этом случае простейшими комбинациями являются

$$9801, 98901, 989901, \dots, \underbrace{98\ 99 \dots 901}_{s \text{ раз}}, \dots$$

Иллюстрирующий пример:

$$98999010000980100009899901.$$



ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ *)

1. Космонавт находится на краю конического кратера и должен попасть в диаметрально противоположную точку (рис. 72). Если он пойдет прямо, то его путь составит 2000 м, а если по краю кратера, то $2000\pi/3$ м. Найдите длину кратчайшего пути.

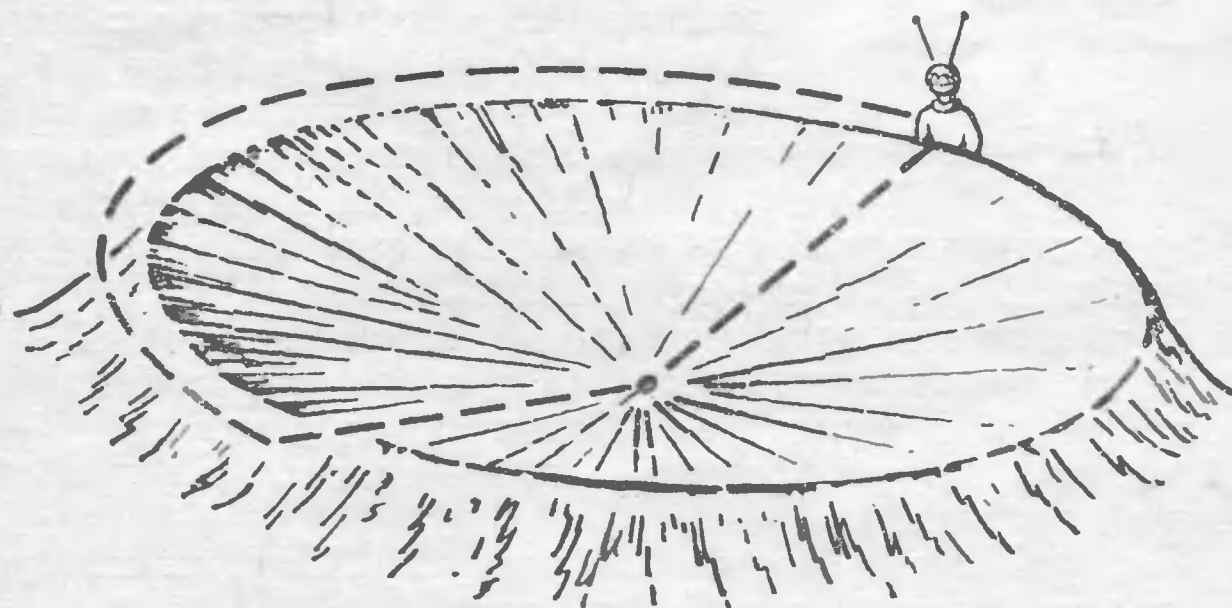


Рис. 72.

2. Доказать, что в прямоугольном треугольнике ABC расстояния от вершины A острого угла до центров вневписанных окружностей, касающихся гипотенузы AB и катета BC , равны. (Вневписанной называется

*) Близкие по содержанию задачи расположены рядом. Задачи 1—30 более простые. Задачи 31—44 и 102—110 относятся к алгебре, задачи 45—55 — к комбинаторике, задачи 56—73 комбинаторно-геометрического содержания (расположения, покрытия, разбиения и пр.), 74—80 — теория площадей, 82—87 — построения и геометрические места, 88—97 — задачи на доказательство.

окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. См. рис. 3 на стр. 10.)

3. Доказать, что четырехгранный угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды нельзя пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм, отличный от квадрата.

4. Три луча OM , ON и OP расположены в пространстве так, что каждые два из них взаимно перпендикулярны. Доказать, что любой данный остроугольный треугольник можно расположить так, чтобы его вершины A , B и C лежали на лучах OM , ON и OP соответственно.

5. Построить треугольник, если заданы центры трех вневписанных окружностей (см. задачу 2 на стр. 69).

6. Полукруг называется вписанным в треугольник, если он касается двух сторон треугольника, а его диаметр лежит на третьей стороне. Докажите, что если радиусы двух вписанных в треугольник полукругов равны, то треугольник равнобедренный.

7. Доказать, что в любом выпуклом восьмиугольнике найдутся две диагонали, образующие угол, меньший 10° (если диагонали не пересекаются, то их надо продолжить; угол между параллельными прямыми считается равным нулю).

8. Доказать, что площадь любого треугольника не превосходит половины площади любого квадрата, покрывающего этот треугольник.

9. Мы хотим из прямоугольника 3×1 сделать флюгер, вырезав равнобедренный треугольник, как показано на рис. 73, так, чтобы вершина O равнобедренного треугольника была центром тяжести флюгера. Как это сделать?

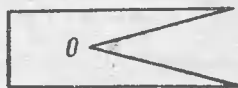


Рис. 73.

10. Найти все многоугольники, обладающие следующим свойством: основание перпендикуляра, опущенного из любой точки внутри многоугольника на любую сторону, лежит внутри этой стороны.

11. Окружности, построенные на боковых сторонах трапеции как на диаметрах, касаются. Докажите, что в эту трапецию можно вписать окружность.

12. а. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна d . Найти длину отрезка, соединяющего вершину прямого угла с центром квадрата, построенного на гипотенузе во внешнюю сторону.

б. Доказать, что упомянутый выше отрезок делит прямой угол треугольника пополам.

13. В окружности проведены два радиуса. Построить хорду, которую эти радиусы делят на три равные части.

14. Дан треугольник ABC . Построить точку X на стороне AB и точку Y на стороне AC так, чтобы $AX = XY = YC$.

15. Доказать, что шахматную доску размером 10×10 клеток нельзя замостить прямоугольниками 1×4 .

16. Можно ли поместить в квадрат 1×1 некоторое число непересекающихся кругов, сумма радиусов которых больше 1970?

17. Задан плоский выпуклый многоугольник с периметром $2p$ и площадью S . Рассматривается тело, составленное из точек пространства, для которых расстояние до ближайшей точки многоугольника не превосходит x . (К точкам многоугольника относятся как внутренние, так и граничные точки.) Докажите, что объем $V(x)$ этого тела выражается формулой

$$V(x) = \frac{4}{3} \pi x^3 + \pi p x^2 + 2Sx.$$

18. На отрезке AB расположите 10 точек так, чтобы сумма попарных расстояний между ними была максимальной. (Некоторые точки могут совпасть.)

19. Доказать, что из любых семи отрезков длиной от 10 см до 1 м можно выбрать три, из которых можно составить треугольник. Покажите, что среди шести отрезков таких трех отрезков может не быть.

20. Докажите, что при всех целых n , больших 1,

$$\frac{1}{2n} < \sqrt[n]{2} - 1 < \frac{1}{n}.$$

21. Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен. Наибольшее значение $|P(x)|$ на отрезке $x_1 \leq x \leq x_2$ назовем «уклонением $P(x)$ от нуля на отрезке $[x_1, x_2]$ ».

Среди квадратных трехчленов

$$x^2 + ax + b$$

найти трехчлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

22. Найти двенадцать натуральных чисел (среди них могут быть и одинаковые), сумма которых совпадает с их произведением. (Найти все решения.)

23. Докажите, что остаток от деления шестизначного числа на 27 не изменится, если переставить первую цифру в конец.

24. Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами, принимающий нечетные значения при $x = 0$ и $x = 1$, ни при каком целом x не может равняться нулю.

25. Сколькими нулями оканчивается десятичная запись числа $9^{999} + 1$?

26. Доказать, что если $m \neq n$, то числа

$$2^{2^m} + 1 \text{ и } 2^{2^n} + 1$$

не имеют общих делителей.

27. Имеется три сосуда вместимостью 3 литра, 5 литров и 8 литров. Восемилитровый сосуд наполнен водой. Как разлить воду на две части по 4 литра?

28. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Яйцо должно вариться 15 минут. Как сварить яйцо, переворачивая часы минимальное количество раз?

29. Семеро ребят играли в настольный теннис «двое на двое». Каждые трое встречались не более чем в одной игре. Какое наибольшее число игр могло быть сыграно?

Партнеры, выступающие вместе в одной игре, могут оказаться противниками в другой игре.

30. Круг разделен на некоторое число равных секторов, часть из которых окрашена в синий, а часть в желтый цвет. Рядом с каждым желтым сектором расположены один желтый и один синий. Через один от каждого желтого сектора также находятся один желтый сектор и один синий. Докажите, что желтых секторов в два раза больше, чем синих.

31. Некоторую сумму денег можно разменять трехрублевыми и пятирублевыми купюрами 57 различными способами. Какой может быть эта сумма?

32. В клетках таблицы 3×3 расставлены 9 целых чисел так, что получился «магический квадрат», то есть суммы чисел, стоящих в

каждом столбце, в каждой строке и на каждой из двух диагоналей, равны S . Доказать, что S делится на 3.

33. Среди первых 100 натуральных чисел выбрать наибольший набор чисел, такой, что сумма любых двух выбранных чисел делится на 26.

34.а. Доказать, что никакая натуральная степень числа 2 не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.

б. Доказать, что число, составленное из одинаковых цифр, не может быть точным квадратом.

35. Докажите, что существуют сколь угодно большие натуральные числа, представимые в виде суммы двух точных квадратов несколькими способами.

36. Длины сторон двух прямоугольников являются целыми числами. В каждом прямоугольнике длина одной стороны не превосходит 60, а длина другой больше 2000. Доказать, что эти прямоугольники равны, если равны их диагонали.

37. Можно ли на клетчатой бумаге начертить прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами так, чтобы его вершины лежали в узлах сетки, но ни одна из сторон не совпадала с линиями сетки (сторона клетки равна 1)?

38. Две моторные лодки выходят одновременно из пунктов, расположенных друг напротив друга на разных берегах реки. Они пересекают реку по прямям, перпендикулярным к линии берега. Скорость каждой лодки постоянна, но одна движется быстрее, чем другая. Лодки проходят друг мимо друга в тот момент, когда они находятся на расстоянии 300 м от ближайшего берега. Достигнув берегов, они остаются у причалов по 10 минут, а затем едут обратно. На обратном пути они встречаются на расстоянии 100 м от другого берега. Какова ширина реки?

39. В равенстве

$$\frac{\text{фут}}{\text{бол}} = 0, \text{голголгол} \dots$$

вместо каждой из семи букв поставить определенную цифру так, чтобы получилось тождество. (Разные буквы означают разные цифры, перед запятой в правой части равенства стоит нуль.)

40. Решить в целых неотрицательных числах уравнение

$$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} = m$$

41. Первая слева цифра десятизначного числа равна числу единиц в записи этого числа, вторая — числу двоек, третья — числу троек, четвертая — числу четверок, ..., девятая — числу девяток, десятая — числу нулей. Найдите это число.

42. Имеются два кирпичных завода — A и B и две стройки — X и Y . Производительность завода A — 4000 кирпичей в сутки, завода B — 3500 кирпичей в сутки. Стройке X требуется 5000 кирпичей в сутки, а стройке Y — 2500. Стоимость перевозки 100 кирпичей с завода A на стройку X — 1 рубль, на стройку Y — 3 рубля, с завода B на стройку X — 1 рубль 50 копеек, на стройку Y — 4 рубля. Как лучше

спланировать перевозки, чтобы их общая стоимость была возможно меньше?

43. Известно, что $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является четвертой степенью целого числа. Доказать, что $a = 0, b = 0$.

44. Доказать, что найдется такое число $\alpha > 0$, что при целом $n \geq 1$ никакое число вида $[2^{n+1}\alpha]$ не делится на $[2^n\alpha]$.

Здесь, как и обычно, $[A]$ читается «целая часть числа A » и обозначает наибольшее целое число, не превосходящее A . Например, $[3\frac{1}{7}] = 3, [\sqrt{2}] = 1, [7] = 7, [-2,3] = -3$.

45. Все 28 костей домино выложены в кольцо по правилам игры в домино. Каждую вторую кость выбросили. Доказать, что оставшиеся 14 костей можно сложить либо в одно кольцо, либо в два кольца. Приведите пример, когда их нельзя сложить в одно кольцо.

46. Можно ли выложить в цепь в соответствии с правилами игры в домино все кости, не содержащие шестерок?

47. Имеется шахматная доска 3×3 , в верхних двух ее углах стоят два черных коня (рис. 74), в нижних — два белых. (Коня ходят, как обычно). Доказать, что нужно сделать не менее 16 ходов, чтобы белых коней поставить на место черных, а черных на место белых.

48. На шахматной доске 8×8 клеток надо расставить побольше коней так, чтобы они не били друг друга. Какое наибольшее число коней удастся так расставить? (Привести пример расстановки). Доказать, что большее число коней расставить так не удастся.

49. На бесконечной шахматной доске стоит конь. Подсчитайте число полей, на которых он может оказаться через n ходов.

50. В розыгрыше кубка Анчурии по футболу участвовало 16 команд примерно равной силы (вероятность выигрыша для любой из них в любой встрече равна $\frac{1}{2}$). Найдите вероятность того, что при честной жеребьевке любимая команда президента Мирафлореса «Зубры» встретится в турнире с фаворитом вице-президента — командой «Бизоны».

Напомним формулу розыгрыша кубка. Сначала играют 8 матчей $\frac{1}{8}$ финала, в которых каждая из 16 команд играет 1 матч с противником, доставшимся ей по жребию. Побежденные из борьбы выбывают, а победители встречаются в $\frac{1}{4}$ финала и т. д. Наконец, в финале встречаются 2 команды, не испытывавшие еще горечи поражения.

51. Из десяти шаров два радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). За наименьшее число проверок выделить оба радиоактивных шара.

52. Имеется шесть монет, из которых три фальшивые. Все настоящие монеты имеют один вес, а все фальшивые — другой вес, меньший. Монеты разложены в три столбика одинакового веса. Двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь выделить все три фальшивые монеты.

53. В десяти мешках монеты настоящие, а в одиннадцатом все монеты фальшивые. Все настоящие монеты одинаковы по весу. Все фаль-

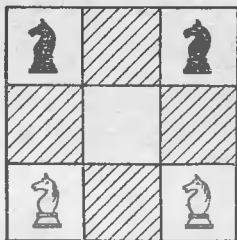


Рис. 74.

шивые монеты тоже одинаковы, но отличаются по весу от настоящих монет, причем заранее неизвестно, легче они или тяжелее. Имеются точные весы со стрелкой. С помощью двух взвешиваний определите, в каком мешке фальшивые монеты.

54. На первом поле полосы 1×30 клеток стоит белый король, а на шестом — черный козлотур. Король может ходить на одно из соседних полей — если оно занято козлотуром, то король его съест. Козлотур перепрыгивает через два поля на третье — если на этом поле окажется король, то козлотур его съест. Король ходит первым. Сможет ли козлотур спастись? Смог ли бы он спастись, если бы вначале стоял на седьмом поле?

55. Среди ста действительных членов Великой академии Лапуты имеется a_k членов, возраст которых не меньше k лет ($k = 1, 2, 3, \dots$). Определить средний возраст академика (с точностью до одного года).

56. На какое наибольшее число частей могут делить плоскость 10 окружностей?

57. Десять пятикопеечных монет расположены, как показано на рис. 75. Убрать наименьшее число монет так, чтобы центры любых трех оставшихся монет определяли неравносторонний треугольник.

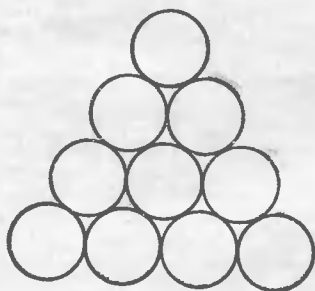


Рис. 75.

58. Между пятью различными точками плоскости имеется 10 попарных расстояний. Как расположить точки, чтобы среди этих десяти чисел не было трех различных? Постарайтесь найти все возможные расположения.

59. Расположите на плоскости 7 точек A_1, A_2, \dots, A_7 так, чтобы любой из углов $\angle A_k A_l A_m$ был кратным 30° . Найдите возможно больше таких расположений.

60. При повороте на угол α вокруг некоторой точки P система из 9 точек, отличных от P , переходит в себя. Какие значения может иметь α ?

61. Плоскость разбита на три произвольные области A, B и C . Доказать, что хотя бы в одной из них найдется пара точек, расстояние между которыми равно 1.

62. В Швамбрании 100 аэродромов. Все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается по самолету и каждый самолет летит на ближайший аэродром. Доказать, что ни на какой аэродром не прилетит более пяти самолетов.

63. Покажите, что 7 достаточно длинных круглых карандашей можно расположить так, чтобы любые два из них прилегали друг к другу.

64. Доказать, что на плоскости нельзя расположить больше четырех выпуклых многоугольников так, чтобы каждые два из них имели общую сторону (и не имели других точек).

65. Можно ли нарисовать на плоскости конечное число отрезков так, чтобы концы любого из них лежали внутри каких-то других отрезков?

66.а. Завод выпускает плитки в виде одинаковых выпуклых пятиугольников. Можно ли выбрать форму этих пятиугольников так,

чтобы ими можно было вымостить любую сколь угодно большую площадку?

б. Решите ту же задачу при дополнительном предположении, что никакие две стороны плитки непараллельны.

в. Докажите, что плоскость нельзя вымостить одинаковыми выпуклыми семиугольниками.

67. Расположить на плоскости одиннадцать одинаковых квадратов, не налегающих друг на друга так, чтобы выполнялось следующее условие: как бы ни окрасить эти квадраты тремя красками, обязательно какие-нибудь два квадрата одного цвета будут иметь общий участок границы.

68. На листе клетчатой бумаги нарисован прямоугольник 10×20 клеток.

Из каждого узла, расположенного внутри прямоугольника, проведена стрелка длины единица. Докажите, что любые две точки границы прямоугольника можно соединить линией, проходящей внутри прямоугольника и не задевающей стрелок.

69. В Швамбрании между городами установлено одностороннее или двустороннее авиационное сообщение. Из каждого города можно куда-нибудь вылететь. Докажите, что найдется хотя бы один город A со следующим свойством: из любого города, до которого можно добраться из A на самолете (может быть, с пересадками), удастся вернуться в A на самолете (возможно, тоже с пересадками).

70. Замкнутая трасса лыжной гонки устроена так, что она несколько раз пересекает сама себя (но нигде не проходит дважды по одному и тому же участку или три раза через одну и ту же точку). Перед началом соревнований судья проехал по всей лыжне и у каждого встретившегося ему пересечения ставил табличку с номером: 1, 2, ... — по порядку. Доказать, что два номера, стоящие у каждого пересечения, имеют разную четность.

71. На каждом поле «шахматной» доски 19×19 поставлено по фишке. Можно ли сдвинуть каждую фишку на одно из соседних полей (по вертикали или горизонтали) так, чтобы в результате никакие две из них не оказались на одном поле?

72. На бумаге нарисован выпуклый 1969-угольник, разбитый на 1968 треугольников. Доказать, что бумагу можно разрезать по прямой так, чтобы отрезать ровно один треугольник.

73. В квадрате нарисовано несколько непересекающихся кругов равных диаметров. Доказать, что можно разрезать квадрат на выпуклые многоугольники так, чтобы внутри каждого многоугольника находился ровно один круг.

74. Выпуклый многоугольник с площадью S содержится в квадрате с площадью a^2 . Доказать, что внутри многоугольника можно поместить отрезок длины S/a .

75. Внутри квадрата площади 1 произвольным образом выбраны 7 точек. Доказать, что существует треугольник площади, не большей $\frac{1}{16}$, каждая из вершин которого совпадает с одной из данных точек или с одной из вершин квадрата.

76. Расположите 7 точек внутри квадрата площади 1 так, чтобы никакие 4 из них не лежали на одной прямой, и площадь любого из треугольников, упомянутых в предыдущей задаче, была бы не меньше $\frac{1}{16}$.

77. В квадрате 2×2 расположено 7 многоугольников площади 1. Докажите, что найдутся два из них, пересекающиеся по площади, большей чем $1/7$.

78. Стороны выпуклого многоугольника периметра p см отодвигаются каждая на 1 см (рис. 76). Доказать, что при этом его площадь увеличится более чем на $(p + \pi) \text{ см}^2$.

79. На заводском дворе размером $150 \times 110 \text{ м}^2$ расположены 10 складов размером по $20 \times 20 \text{ м}^2$, 4 цеха по $40 \times 10 \text{ м}^2$ и круглое бензо-

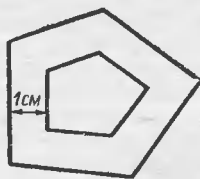


Рис. 76.

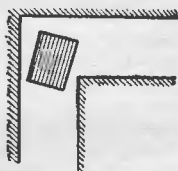


Рис. 77.

хранилище радиуса 10 м. Докажите, что на дворе найдется место для круглой клумбы радиуса 5 м.

80. Прямоугольный плот может плыть по каналу шириной h и может проехать через поворот этого канала, изображенный на рис. 77. Какую наибольшую площадь может иметь плот?

81. В круге проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD . Затем радиусом BC с центром в точке B проведена дуга CD . Построить квадрат, равновеликий луночке, заштрихованной на рис. 78.

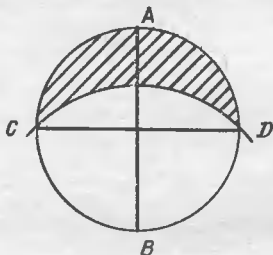


Рис. 78.

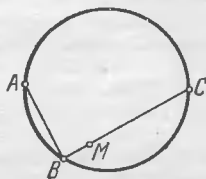


Рис. 79.

82. Дана дуга окружности, содержащая α° , и стягивающая ее хорда. Найти геометрическое место середины отрезков, у которых один конец лежит на дуге, а другой на хорде, в случае когда

а) $\alpha = 180^\circ$, б) $\alpha = 270^\circ$.

83. Дан параллелограмм $ABCD$. Найти геометрическое место вершин четырехугольников, середины сторон которых совпадают с точками A, B, C и D .

84. Пусть A и C — две фиксированные точки окружности, а B — произвольная точка на той же окружности. Серединой ломаной ABC назовем такую точку M , что расстояния от M до точек A и C вдоль ломаной равны. (Например, на рис. 79 $BC > AB$ и $CM = MB + BA$.) Найти геометрическое место точек M .

85. В регби играют на прямоугольном поле, две короткие стороны которого называются лицевыми линиями. Цель нападающего — забежать за лицевую линию противника. Цель защитника — поймать нападающего раньше, чем он добежит до лицевой линии. Из каких точек поля нападающий может прорваться к лицевой линии, если защитник стоит в данной точке M ? Скорости нападающего и защитника одинаковы.

86. С помощью линейки длиной 10 см и циркуля раствором не более 5 см провести отрезок, соединяющий точки A и B , отстоящие друг от друга на 1 м.

87. Разделить отрезок циркулем и линейкой на 6 частей, проведя не более 8 линий.

88. К двум пересекающимся окружностям проведены общие касательные и точки касания соединены между собой. Докажите, что получившийся четырехугольник — трапеция, средняя линия которой проходит через точки пересечения окружностей.

89. В окружность вписан треугольник ABC , а в него, в свою очередь, также вписана окружность. Из произвольной точки M внешней окружности проведены хорды MP и MQ , касающиеся внутренней окружности. Докажите, что хорда PQ также касается внутренней окружности.

90. В трапеции $ABCD$ биссектрисы внутренних углов A и B , лежащих к боковой стороне AB , пересекаются в точке M , а биссектрисы углов C и D — в точке N . Доказать, что величина отрезка MN равна разности полупериметра и суммы боковых сторон трапеции.

91. Противоположные стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ продолжаются до пересечения в точках E и H (рис. 80). Доказать, что

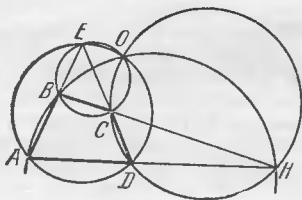


Рис. 80.

окружности, описанные вокруг треугольников ABH , AED , BEC и CDH , пересекаются в одной точке.

92. На сторонах выпуклого центрально-симметричного шестиугольника построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Вершины этих треугольников, не принадлежащие первоначальному шестиугольнику, соединяются отрезками первая со второй, вторая с третьей и т. д. Доказать, что середины сторон получившегося шестиугольника являются вершинами правильного шестиугольника.

93а. В окружность радиуса R с центром в точке O вписан правильный n -угольник. Пусть A — произвольная точка на этой окружности. Докажите, что сумма проекций n отрезков, соединяющих точку A с вершинами n -угольника, на прямую AO равна nR .

б. В условиях предыдущей задачи докажите, что сумма квадратов расстояний от точки A до вершин n -угольника равна $2nR^2$ (ср. с задачей 73 на стр. 16).

94. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного n -угольника до произвольной прямой, проходящей через его центр, не зависит от положения этой прямой.

95. Доказать, что в любом прямоугольном треугольнике сумма катетов больше суммы гипотенузы и опущенной на нее высоты.

96. Доказать, что среди всех квадратов, которые можно поместить в данный прямоугольный треугольник, наибольшую площадь имеет тот, диагональ которого совпадает с биссектрисой прямого угла этого треугольника.

97. Внутри квадрата со стороной 1 расположены два неперекрывающихся квадрата со сторонами a и b . Доказать, что

$$a + b \leq 1.$$

98. На координатной плоскости нарисована фигура, ограниченная снизу отрезком оси OX от -1 до $+1$, а сверху куском параболы $y = 1 - x^2$. Пользуясь циркулем и линейкой, вписать в эту фигуру прямоугольник данного периметра P так, чтобы две его вершины лежали на оси OX , а две другие — на параболе.

99*. Найти все значения P , при которых предыдущая задача имеет решение.

100*. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ со стороной 1 и с центром O из вершины A опускается перпендикуляр AA_1 на OB . Из точки A_1 опускается перпендикуляр A_1A_2 на OC . Аналогично строятся перпендикуляр A_2A_3 , затем A_3A_4 и т. д.

а) Найти длину ломаной $AA_1A_2 \dots A_n$.

б) К какому пределу стремится эта длина при неограниченном возрастании n ?

101. Имеется два круга, разделенные каждый на 20 секторов, занумерованных числами от 1 до 20. Первый игрок на одном круге заштриховывает часть секторов с нечетными номерами произвольным образом. Второй игрок поступает аналогично с четными секторами. Затем штриховка обоих игроков переносится на один круг, и первому засчитывается столько очков, сколько оказалось незаштрихованных областей. (Считается, что одну область образует группа незаштригованных секторов, расположенных рядом.) Доказать, что первый игрок может играть так, чтобы в любом случае получить не менее 10 очков.

102а. Найти приближенные значения трех корней уравнения

$$0,001x^3 + x^2 - 1 = 0$$

с точностью до 0,1.

б*. Доказать, что эти корни — иррациональные числа.

103. Доказать, что $\lg N$ при любом натуральном N является либо целым числом, либо иррациональным.

104. На каждом поле шахматной доски записано произведение номера горизонтали на номер вертикали, которым принадлежит это поле. Расположить на этой доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга и чтобы сумма чисел на полях, занимаемых ладьями, была наибольшей.

105. Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами, n — некоторое целое число и $P(n) = M$. Доказать, что $P(n + kM)$ при любом целом k делится на M .

106. Пусть $P(x)$ — многочлен, отличный от постоянной, n_1, n_2, n_3, \dots — возрастающая последовательность натуральных чи-

сел. Доказать, что среди чисел $P(n_1)$, $P(n_2)$, $P(n_3)$, . . . , есть сколь угодно большие по абсолютной величине.

107. Используя результаты двух предыдущих задач, доказать, что не существует многочлена с целыми коэффициентами, отличного от константы, значения которого во всех целых точках — простые числа. (Это утверждение известно под названием теоремы Эйлера.)

108. В нашем распоряжении имеется два сосуда вместимостью $v_1 = 7$ л и $v_2 = 11$ л, водопроводный кран и слив. Доказать, что можно, совершив ряд переливаний, добиться того, чтобы в обоих сосудах оказалось V л воды, где V — любое целое число от 1 до $v_1 + v_2$.

109. Доказать, что если в условии предыдущей задачи $v_1 = 9$ л, а $v_2 = 12$ л, то $V = 8$ получить не удастся.

110. Доказать, что результат задачи 108 сохранится для произвольных взаимно простых чисел v_1 и v_2 .

Евгений
Борисович
Дынкин

Станислав
Алексеевич
Молчанов

Александр
Львович
Розенталь

Алексей
Кириллович
Толпыго

Математические задачи
М., 1971 г., 80 стр. с илл.

| | |
|----------------|----------------------------------|
| Редакторы | В. Л. Гутенмахер, Г. Я. Пирогова |
| Техн. редактор | С. Я. Шкляр |
| Корректор | А. Л. Ипатова |

| | |
|----------------|------------------------|
| Сдано в набор | 29/IV 1971 г. |
| Подп. к печати | 10/VIII 1971 г. |
| Бумага | $84 \times 108^{1/32}$ |
| Физ. печ. л. | 2,5. |
| Усл. печ. л. | 4,2. |
| Уч.-изд. л. | 4,75. |
| Тираж | 200 000 экз. |
| Цена книги | 13 коп. |
| Т-12396. | |
| Заказ | 2292 |

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Набрано во 2-ой типографии издательства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.
Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, М-54, Валовая, 28

Математика

Библиотечка
физико-математической школы

Серия основная

Выпуск 1 И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов,
Метод координат.

Выпуск 2 И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль,
Функции и графики (основные приемы).

Выпуск 3 С. И. Гельфанд, М. Л. Гервер, А. А. Кириллов,
Н. Н. Константинов, А. Г. Кушниренко, Задачи
по элементарной математике (последовательности,
комбинаторика, пределы).

Выпуск 4 Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Прямые и
кривые.

Выпуск 5 М. И. Башмаков, Уравнения и неравенства.

Серия дополнительная

Выпуск 1* Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь,
А. К. Толпыго, Математические задачи.

Выпуск 2* А. А. Кириллов, Пределы.

Выпуск 3* Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь,
Математические соревнования (арифметика,
алгебра).